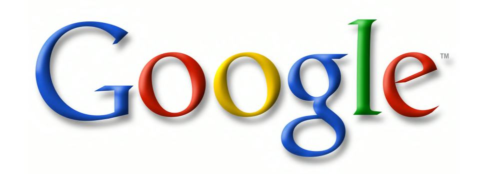


A. H. BUCHERER

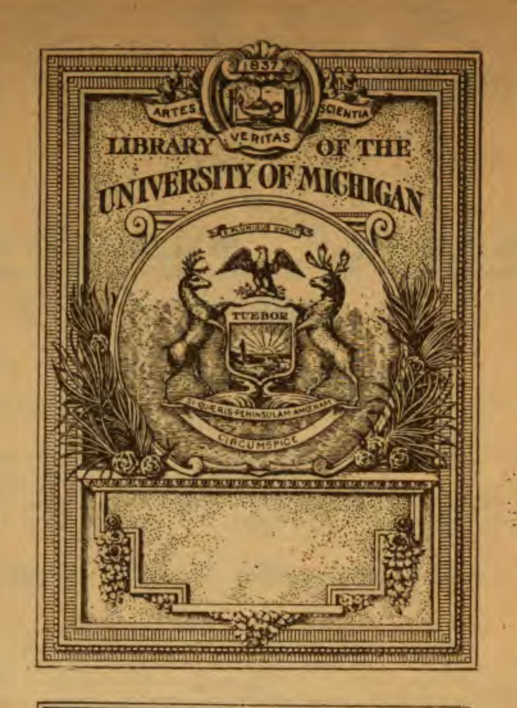
ELEMENTE DER VEKTOR - ANALYSIS

MIT BEISPIELEN AUS DER THEORETISCHEN PHYSIK



Verla[...] [...]zig.

Tec[...] [...]nik



Professor der Mechan[...] [...]hule in München

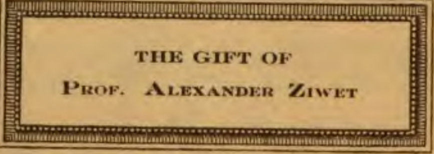
I. Band: Einfüh[...] [...]s geb. ℳ 10.—
II. Band: Graphi[...]
III. Band: Festigl[...] [...] 12.—
IV. Band: Dynam[...] [...]—

Preis des [...] 44.—

Herr Geheimra[...] [...]eibt:

„Wie bei de[...] [...]ist die Föppl'sche Bearbeitung der Me[...] [...]achheit und Klarheit ist, das Hauptg[...] [...]elter analytischer Betrachtung wird de[...] [...]undanschauungen auf physikalischer B[...] [...] ersten Bande am meisten in die Auge[...]

„Als eigena[...] [...]as Buch, welches durch seine große [...] [...]uß ausüben wird, jedenfalls auch von [...] [...] Einzelheiten."



Die [...] [...]matik

in elementarer Behandlung.

Von

Prof. Dr. Gustav Holzmüller,

Direktor der Kgl. Maschinenbauschule zu Hagen i. W., Mitglied der Leopoldinisch-Karolinischen Akademie.

Erster Teil: enthaltend die statischen Momente und Schwerpunktslagen, die Trägheits- und Centrifugalmomente für die wichtigsten Querschnittsformen und Körper der technischen Mechanik in rechnender und graphischer Behandlung unter Berücksichtigung der Methoden von Nehls, Mohr, Culmann, Land und Reye. Mit 287 Fig. und zahlr. Übungsaufgaben. [XI u. 340 S.] gr. 8. 1897. In Leinw. geb. n. ℳ 5.—

Zweiter Teil: enthaltend das Potential und seine Anwendung auf die Theorieen der Gravitation, des Magnetismus, der Elektrizität, der Wärme und der Hydrodynamik. Mit 237 Figuren, zahlr. Übungsbeispielen und einem Anhange über Maßeinheiten. [XVII u. 440 S.] gr. 8. 1898. In Leinw. geb. n. ℳ 6.—

Die „Zeitschrift des Vereins deutscher Ingenieure" schreibt:

„In allen Abschnitten bilden nicht die mathematischen Formeln die Hauptsache, sondern die zahlreichen Anwendungen auf mechanische Aufgaben. Überall wird gezeigt, wie mit sehr wenigen mathematischen Sätzen eine Unmenge mechanischer Aufgaben gelöst werden kann; zur Erhöhung des Interesses sind stets überaus anregende Betrachtungen über weitere Anwendbarkeit der entwickelten Verfahren angeknüpft. — Jede Aufgabe ist elegant gelöst, der eingeschlagene Weg oft geradezu verblüffend, sodaß ein Studium nicht nur den Lehrern an technischen Unterrichtsanstalten sowie den Mathematikern an allgemein bildenden Schulen, sondern auch solchen Ingenieuren, die noch keine Gelegenheit hatten, elementare Verfahren kennen zu lernen, aufs wärmste zu empfehlen ist."



ELEMENTE

DER

VEKTOR-ANALYSIS.

MIT BEISPIELEN

AUS DER THEORETISCHEN PHYSIK

VON

DR. A. H. BUCHERER,

PRIVATDOZENT AN DER UNIVERSITÄT BONN.

LEIPZIG,

DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.

1903.

Vorwort.

Unter den verschiedenen Disziplinen der Mathematik nimmt die Vektoranalysis eine eigenartige Stellung ein. In ihr finden wir die Begriffe der Algebra erweitert und in einer Weise auf das Rechnen mit geometrischen Größen angewandt, daß wir mit diesen Größen direkt rechnen können, anstatt mit den kartesischen Koordinaten derselben, welche mit ihnen künstlich verknüpft sind.

Daß eine solche Methode ein wichtiges Hilfsmittel in der Physik abgeben würde, konnte vorausgesehen werden. Und in der Tat findet das Rechnen mit Vektorgrößen eine beständig zunehmende Anwendung. Indem hierbei die Denktätigkeit auf die in der Physik vorkommenden geometrischen Größen selbst gerichtet wird, anstatt auf die mit ihnen verknüpften Zahlen, gewinnen die Denkoperationen an Kraft, Lebendigkeit und Anschaulichkeit.

Hierzu kommt noch ein anderer Vorzug. Die Symbolik der Vektoranalysis ist eine überraschend einfache und übersichtliche. Operationen, welche bei Verwendung von kartesischen Methoden verwickelt und schwierig erscheinen, werden kurz und einfach, wenn sie in ihre Äquivalente in der Sprache der Vektorenrechnung übersetzt werden, ohne dabei an umfassender Bedeutung und Bestimmtheit einzubüßen. Die Vorbereitung eines elementaren, speziell für Physiker bestimmten Werkchens über Vektoranalysis bedarf daher wohl keiner besonderen Apologie, zumal es bisher an einem solchen in deutscher Sprache verfaßten und separat ausgegebenen Werke gefehlt hat.

Bei der Ausarbeitung der Elemente der Vektoranalysis ließ ich mich hauptsächlich von praktischen Erwägungen leiten. Es lag mir weniger daran, eine erschöpfende Abhandlung über den Gegenstand zu schreiben, als vielmehr den Studierenden der Physik sobald wie möglich in den Stand zu setzen, die vektoriellen Methoden zur Lösung und Bewältigung physikalischer Fragen anzuwenden und ihn vor allem dazu anzuregen, sich dieser Methoden auch allgemein beim „physikalischen Denken“ zu bedienen. Er wird sich so bald des Vorteils bewußt werden, den ein Operieren mit sinnfälligen räumlichen Beziehungen über ein solches mit reinen Abstraktionen besitzt.

In der Form der Darstellung habe ich mich im großen und ganzen Heaviside angeschlossen und mich dabei derselben Symbole bedient, wie A. Föppl in seiner vorzüglichen, im selben Verlage erschienenen 'Einführung in die Maxwellsche Theorie'. Gleichwohl habe ich es für zweckmäßig gehalten, die von Graßmann herrührende Zuordnung von Flächen zu Vektoren ausgiebig zu verwerten. Die Ableitung mancher Theoreme gewinnt dadurch an Einfachheit. Angesichts des eigentlichen Zweckes dieses Buches und seines elementaren Charakters glaubte ich davon absehen zu müssen, in funktionentheoretische Erörterungen einzugehen, und ich habe mich demgemäß hauptsächlich darauf beschränkt, solche physikalische Vektoren der Untersuchung zu unterziehen, denen eine stetige Verteilung im Raume zukommt.

In der Wahl der Beispiele habe ich mich von der Absicht leiten lassen, ein möglichst vielseitiges Bild von der Anwendbarkeit der vektoranalytischen Methoden zu geben. Eine Anzahl von Beispielen wurde besonders für diesen Zweck ausgearbeitet und gelangt zum erstenmal zur Veröffentlichung.

Bonn, im Dezember 1902.

A. H. Bucherer.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung	1
§ 1. Addition und Subtraktion	2
§ 2. Zerlegung von Vektoren	5
Über Grundvektoren und Raumsysteme	6
§ 3. Rotationen und zugeordnete Richtungen	7
§ 4. Produkte aus zwei Faktoren. Darstellung von Flächen durch Vektoren.	
I. Das Vektorprodukt	9
II. Das skalare Produkt	14
§ 5. Produkte aus drei Faktoren	16
§ 6. Über Differentiation.	
Allgemeines	21
§ 7. Über Differentiation	23
§ 8. Über Differentiation	33
Einfachere Beispiele aus der Mechanik.	
I. Zur Statik starrer Körper	35
II. Zur Theorie des Schwerpunktes	36
III. Die Bewegung eines starren Körpers	38
IV. Zur Kinematik eines Punktes. Das erste Keplersche Gesetz	39
V. Die Bewegung eines Punktes auf einer Kurve	40
§ 8a. Vektoranalytische Transformationen	42
§ 9. Das Potential	47
§ 10. Zerlegung eines Vektors in einen solenoidalen und einen wirbelfreien Anteil	56

		Seite
§ 11.	Umwandlung von Differentialquotienten nach der Zeit in solche nach dem Ort.	
	I. Translation von Vektorfeldern	57
	II. Rotationen von Vektorfeldern	60
§ 12.	Das Greensche Theorem	66
§ 13.	Der Satz von Beltrami und das Theorem von Poincaré-Lorentz	70
§ 14.	Das Huyghenssche Prinzip	76
§ 15.	Zur Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.	
	I. Der Helmholtzsche Satz	77
	II. Über die Potentialbewegungen idealer Flüssigkeiten. Die Bewegung einer Kugel in einer idealen Flüssigkeit	80
	Zusammenstellung der wichtigsten Formeln und Definitionen	85

Berichtigungen.

S. 59: In Gl. (84) setze $c(\mathfrak{E}\nabla)\mathfrak{v}$ anstatt $c(\mathfrak{E}V)\mathfrak{v}$.

S. 62: In Gl. (98) setze $-\mu(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{H}$ anstatt $-\mu(\mathfrak{v}\nabla)$.

S. 62: In Gl. (102) und (103) erhält das letzte Glied noch den Faktor j.

Einleitung.

Größen, welchen außer ihrem numerischen Werte eine Richtung zukommt, heißen Vektoren.

Die Begriffe: Geschwindigkeit, Kraft, Verschiebung umfassen zwei Ideen: Größe und Richtung.

Die in der Physik vorkommenden Vektoren erfordern zu ihrer Bestimmung außerdem die Angabe des Ortes, auf welchen sie sich beziehen. Ein Vektor bezieht sich immer auf einen bestimmten Punkt des Raumes.

Den Vektoren stehen gegenüber die Skalare, welchen nur ein numerischer Wert zukommt. Der bekannteste Skalar ist die Zahl. Skalare Quantitäten, welche in der Physik eine Rolle spielen, sind unter anderem: Energie, Dichte, Temperatur, Masse.

Fig. 1.

Vektoren werden durch deutsche, Skalare durch lateinische Buchstaben gekennzeichnet.

Der Zahlenwert eines Vektors heißt Tensor. Ein Vektor läßt sich in seiner Größe und Richtung graphisch durch einen Pfeil darstellen. Die Länge gibt unter Zugrundelegung eines beliebigen Maßstabes den numerischen Wert des Vektors an, während die Richtung durch die Richtung des Pfeiles gekennzeichnet ist.

Der Punkt, von dem aus der Pfeil gezogen ist, heißt Anfang des Vektors, die Spitze Ende desselben.

Eine Vergleichung der Werte oder Stärken zweier Vektoren kann ohne anderweitige Vereinbarung nur Sinn haben, wenn

die Vektoren dieselbe Richtung haben. Die Aussage, der eine Vektor sei n-mal so groß wie ein anderer, setzt voraus, daß die in Frage kommenden Vektoren gleichgerichtet sind. Es ist dann der Tensor des einen Vektors n-mal so groß wie derjenige des anderen.

Vektoren, deren Tensoren gleich der Einheit sind, werden Einheitsvektoren genannt.

Ein Vektor $\mathfrak{A}$, mit dem Tensor A, ist A-mal so groß wie ein gleichgerichteter Einheitsvektor. Ein Einheitsvektor, dessen Richtung in die Richtung von $\mathfrak{A}$ fällt, wird mit $\mathfrak{A}_1$ bezeichnet:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 A.$$

Jeder Vektor läßt sich so als das Produkt seines Tensors und eines gleichgerichteten Einheitsvektors darstellen.

§ 1.

Addition und Subtraktion.

Um auf graphischem Wege die Summe von zwei Vektoren zu finden, setzt man die betreffenden Pfeile so aneinander, daß der Anfang des einen Vektors an das Ende des zweiten kommt, und verbindet dann den Anfang des ersten mit dem Ende des zweiten:

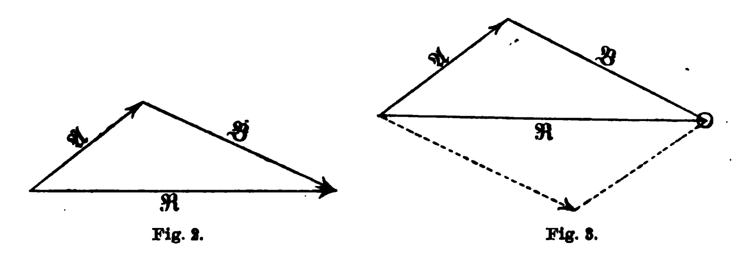


Fig. 2. Fig. 3.

Die Länge der so erhaltenen Verbindungslinie $\mathfrak{R}$ gibt den Tensor der Summe der beiden Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ an, während die Richtung dieser Summe $\mathfrak{R}$ dadurch bestimmt ist, daß der Anfang von $\mathfrak{R}$ mit dem Anfang von $\mathfrak{A}$ und das Ende von $\mathfrak{R}$ mit dem Ende von $\mathfrak{B}$ zusammenfällt. $\mathfrak{R}$ wird auch die

Resultante, und $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ Komponenten genannt. Die Reihenfolge der Summierung ist gleichgültig.

Man kann auch $\mathfrak{R}$ finden, indem man $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit ihren Anfängen zusammensetzt, dann durch die Enden Parallelen zu $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zieht und die Diagonale des so entstandenen Parallelogramms zieht. (Fig. 3.) Die erstere Methode ist vorzuziehen.

Ist die Summe von mehr als zwei Vektoren zu bilden, so verfährt man in der Weise, daß man zunächst die Resultante der beiden ersten Summanden, wie angegeben, konstruiert, dann zu dieser den dritten Summanden addiert und so fort. Man erkennt leicht, daß man die einzelnen Summanden nur so aneinander zu reihen braucht, daß der Anfang des einen Vektors immer auf das Ende des vorigen Vektors folgt. Verbindet man dann den Anfang des ersten Summanden mit dem Ende des letzten, so ist diese Verbindungslinie die Resultante. (Siehe Fig. 3a.) Dies gilt für Vektoren, welche in einer Ebene liegen, d. h. für koplanare Vektoren, ebenso wie für nonkoplanare Vektoren.

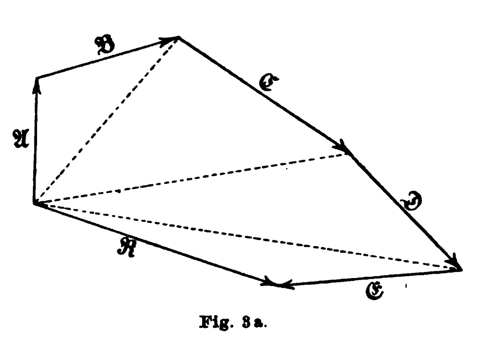


Fig. 3a.

Stoßen Anfang des ersten und Ende des letzten zusammen, so ist die Summe sämtlicher Vektoren null.

Man subtrahiert Vektoren, indem man die zu subtrahierende Größe nach Umkehrung der Richtung addiert.

Eine Summierung der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ drückt man durch die Vektorgleichung aus:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{R}.$$

Anmerkung. Treffen die Enden von zwei oder mehreren Vektoren bei graphischen Darstellungen zusammen, so kann ein kleiner Kreis an die Stelle der Pfeilspitzen treten.

Die in der Physik vorkommenden Vektoren sind oft Funktionen der Lage im Raume. Betrachtet man z. B. den Raum, welcher einen geladenen Körper umgibt, so wird die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ in jedem Punkte eine gewisse Größe und Richtung haben, d. h. bringen wir eine Einheitsladung an verschiedene Punkte dieses Raumes, so wird auf dieselbe je nach der Lage der Punkte eine bestimmte Kraft ausgeübt werden.

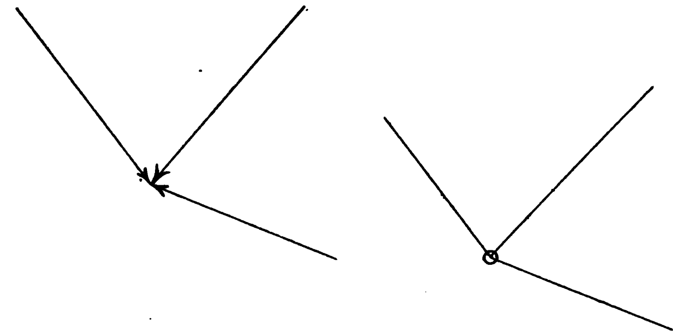


Fig. 4.

Nehmen wir der Einfachheit wegen an, die Ladung sei in einem unendlich kleinen Volum konzentriert. Bringt man in den umgebenden Raum eine zweite derartige Ladung und untersucht nun wieder den Raum mit Hilfe einer Einheitsladung, so ist natürlich eine Änderung der Kraft $\mathfrak{E}$ festzustellen. Man findet nun, daß in einem beliebigen Punkte die Kraft $\mathfrak{E}$ so groß ist, als ob jede einzelne Ladung ganz unbehindert durch die andere ihre Wirkung auf die Einheitsladung ausübte. Sind daher in einem beliebigen Punkte die Kräfte, welche jede Ladung an und für sich, d. h. bei Abwesenheit der anderen, ausüben würde, $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$, so ist bei Anwesenheit beider die Kraft $\mathfrak{E}$:

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}' + \mathfrak{E}''.$$

Das ist ein typisches Beispiel für die Summierung von Vektoren, welche im Raume stetig verteilt sind.

Ein der Untersuchung unterzogenes Gebiet, in welchem ein Vektor eine räumliche Verteilung besitzt, nennt man das Feld des Vektors.

Es ist zu beachten, daß $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}'$ und $\mathfrak{E}''$ sich auf denselben Punkt des Feldes beziehen. Bei der Addition von Vektoren macht man diese stillschweigende Voraussetzung. In manchen Fällen sind die zu addierenden Vektoren verschiedenen Orten zugeordnet. Man setzt dann bei der Addition voraus, daß sich die verschiedenen Vektoren derartig parallel mit ihrer ursprünglichen Richtung im Raume verschieben lassen, daß sie in einem Punkte zusammentreffen. Die Angriffspunkte von Kräften, welche an verschiedenen Punkten eines starren Körpers angreifen, lassen sich nur in ihrer Angriffslinie beliebig verschieben. Die Wirkung dieser Kräfte kann daher nicht durch Addition der einzelnen Kräfte gefunden werden. Ist z. B. der Körper um eine Achse drehbar, so ist die Bewegung, bezw. der Gleichgewichtszustand von der Summe der Kraftmomente, welche ebenfalls durch gewisse Vektoren darstellbar sind, abhängig. (Siehe weiter unten.)

§ 2.

Zerlegung von Vektoren.

Ebenso wie man die Summe von zwei oder mehreren Vektoren bildet, kann man auch einen gegebenen Vektor in Summanden zerlegen.

Häufig ist es nützlich, einen Vektor in zwei mit ihm in derselben Ebene liegende, senkrecht zueinander stehende Vektoren zu zerlegen, so daß der eine der beiden Summanden oder Komponenten in eine bestimmte Richtung fällt. In diesem Falle bildet der Vektor die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen eine Kathete die gewünschte Richtung hat. Unter der Komponente eines Vektors in einer bestimmten Richtung versteht man allgemein die geometrische Projektion des Vektors auf diese Richtung. Die Komponente von $\mathfrak{A}$ in der Richtung $\mathfrak{C}$ wird durch das Symbol $\mathfrak{A}_{\mathfrak{C}}$ gekennzeichnet.

Man hat

(2) $$\mathfrak{A}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}_1 A \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{C}).$$

Daß ein Vektor im allgemeinen nicht durch zwei in beliebige Richtungen fallende Summanden ausdrückbar ist, leuchtet ein; z. B. sind die Komponenten eines auf der xy-Ebene eines Koordinatensystems senkrecht stehenden Vektors null, wenn diese Komponenten selbst in der xy-Ebene liegen.

Richtungen senkrecht zur Richtung eines Vektors nennt man Niveaurichtungen. Aus Gleichung (2) folgt, daß die besondere Komponente von $\mathfrak{A}$, welche null ist, auf $\mathfrak{A}$ senkrecht steht. Diejenige Komponente von $\mathfrak{A}$, welche den größten Wert erreicht, d. h. deren Tensor den Wert A erreicht, fällt in die Richtung von $\mathfrak{A}$.

Anmerkung. Dieses als selbstverständlich erscheinende Ergebnis ist wertvoll bei der später zu erörternden Größe des Vektors ∇A.

Der Ort für alle Richtungen, für welche die Komponenten eines Vektors verschwinden, ist diejenige Fläche, welche der betreffende Vektor senkrecht schneidet.

Über Grundvektoren und Raumsysteme.

Während ein gegebener Vektor sich nicht allgemein durch zwei in beliebige Richtungen fallende Summanden zerlegen, d. h. darstellen läßt, so ist es doch immer möglich, einen Vektor in drei nicht in einer Ebene liegende Komponenten zu zerlegen. Eine sehr wichtige Zerlegung eines Vektors ist die Zerlegung in drei zueinander senkrecht stehende Komponenten. Bezeichnet man die drei Einheitsvektoren, welche diesen Richtungen entsprechen, mit $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ und die Tensoren der Komponenten des Vektors $\mathfrak{A}$ nach diesen Richtungen mit A_1, A_2, A_3, so ist:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3.$$

$\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ werden Grundvektoren genannt. Damit die Aufeinanderfolge der Richtungen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ eine eindeutige sei, ist noch festzusetzen, ob diese Aufeinanderfolge einem Rechts-

system oder einem Linkssystem entsprechen soll. Wir wählen ein Rechtssystem. Was hierunter zu verstehen ist, erhellt aus folgender Erörterung.

Die Figur stelle einen Würfel mit der Kantenlänge gleich eins dar. Die Grundvektoren sind durch die Pfeile dargestellt. Setzt man eine rechtsgängige Schraube senkrecht auf die $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$-Fläche auf und schraubt dieselbe in den Würfel ein, so dreht sich die Schraube in demselben Sinne, in dem sich der Vektor $\mathfrak{i}$ um seinen Anfangspunkt dreht, wenn man ihn in die $\mathfrak{j}$-Richtung bringt. Gleichzeitig bewegt sich die Schraube in der $\mathfrak{k}$-Richtung vorwärts. Ist nun die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ derart, daß eine rechtsgängige Schraube, indem sie sich von der $\mathfrak{i}$- in die $\mathfrak{j}$-Richtung dreht, in der $\mathfrak{k}$-Richtung vordringt, so entspricht diese Aufeinanderfolge einem Rechtssystem.

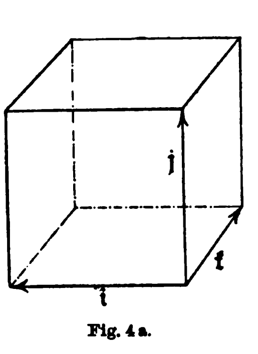


Fig. 4a.

Anmerkung. Zuweilen ist es wichtig, zu untersuchen, ob bei Umkehrung der Richtungen von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Komponenten der in Frage kommenden Vektoren ihr Vorzeichen wechseln oder nicht. Auf Grund ihres Verhaltens bei der Inversion der Koordinatenrichtungen kann man die Vektoren in polare und axiale einteilen. Als Beispiel von axialen Vektoren werden wir das Vektorprodukt kennen lernen. Die Komponenten dieses Vektors ändern ihr Vorzeichen nicht bei Umkehrung der Koordinatenrichtungen. (Siehe weiter unten.)

§ 3.

Rotationen und zugeordnete Richtungen.

Man kann unter Zugrundelegung eines bestimmten Systems — in unserem Falle eines Rechtssystems — einer Drehung eine Richtung zuordnen.*) Zunächst setzen wir voraus, daß die Rotation in einer Ebene stattfinde. Findet für den Beobachter

*) Lorentz 1892, p. 371.

die Rotation entgegengesetzt dem Sinne der Bewegung der Zeiger der Uhr statt, so entspricht diese Rotation einer Richtung, welche zur Rotationsebene senkrecht und auf den Beobachter zugewandt ist, d. h. der Richtung, in welcher sich eine rechtsgängige Schraube bei der erwähnten Drehung fortbewegen würde. Diese Drehung wird auch als positive bezeichnet, die entgegengesetzte als negative. Die Bezeichnung positiv und negativ hat natürlich nur relative Bedeutung, indem sie von dem Standpunkt des Beobachters abhängig ist, während die der Drehung zugeordnete Richtung unabhängig hiervon eindeutig festgelegt ist.

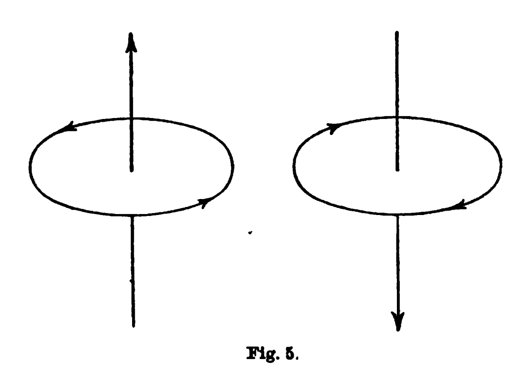


Fig. 5.

Wenn man einer Rotation eine Richtung zuordnen kann, so ist einleuchtend, daß man eine beliebige geschlossene Kurve, welche in einer Ebene liegt, mit einer Richtung in Beziehung setzen kann, wenn man sich vorstellt, daß die Tracierung der Kurve durch die Bewegung eines Punktes erfolgt sei. Unter Tracierung soll weiterhin nicht sowohl die Begrenzung einer Fläche durch eine Kurve verstanden werden, als der Umlaufssinn des Punktes, dessen Bahn die Kurve darstellt.

Entspricht die Tracierung der Kurve dem Umlaufssinn der Zeiger der Uhr, so ist die zugeordnete Richtung vom Beobachter fortgewandt und senkrecht zur Ebene der Kurve.

Man kann nun noch einen Schritt weiter gehen und der begrenzten Fläche selbst einen Vektor zuordnen. Dies geschah zuerst durch Graßmann. Bei Besprechung des Vektorproduktes im folgenden Paragraphen soll diese Zuordnung erläutert werden.

§ 4.

Produkte aus zwei Faktoren. Darstellung von Flächen durch Vektoren.

I. Das Vektorprodukt.

Das Parallelogramm sei durch die Bewegung eines Punktes entstanden, deren Richtung durch die Pfeile angegeben ist. Der Tracierung entspricht eine Richtung, welche senkrecht zur Fläche des Parallelogramms und nach oben gerichtet ist. — Einen Vektor, welcher diese Richtung hat, und dessen Tensor gleich dem Inhalt des Parallelogramms ist, bezeichnen wir als den dem Parallelogramm zugeordneten Vektor.

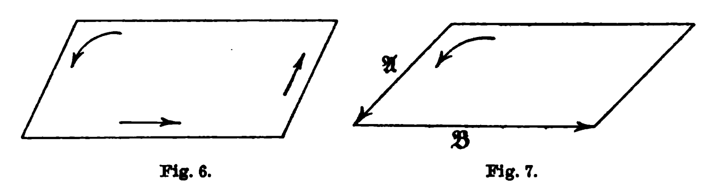


Fig. 6. Fig. 7.

Offenbar ist die Tracierung der Kurve bestimmt, wenn die Aufeinanderfolge zweier mit der Ebene koplanaren Vektoren angegeben wird; und es liegt nahe, als solche Vektoren zwei bei der Tracierung aufeinander folgende Seiten des Parallelogramms zu wählen, deren Richtung der Tracierung entspricht.

Die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und dem zugeordneten Vektor $\mathfrak{C}$ muß einem Rechtssystem entsprechen. $\mathfrak{C}$ ist alsdann:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 AB \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Da nun die rechte Seite dieser Definitionsgleichung durch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eindeutig bestimmt ist, so hat man dafür die abgekürzte Bezeichnungsweise eingeführt:

$$\mathfrak{C} = \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \tag{4}$$

Die Reihenfolge von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ ist hierbei wichtig, denn wenn $\mathfrak{B}$ auf $\mathfrak{A}$ folgt, so kehrt sich die Richtung von $\mathfrak{C}$ um, d. h.

$$\mathfrak{C} = -\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{A}.$$

$\mathfrak{C}$ kann auch direkt als die Fläche des mit einem bestimmten Umlaufssinne versehenen Parallelogramms bezeichnet

werden. Ein solcher Vektor bezieht sich dann im allgemeinen nicht auf einen bestimmten Punkt des Raumes.

Man addiert derartige ebenen Flächen, indem man die zugeordneten Vektoren addiert.

Jedem Grundvektor läßt sich eine Fläche, gebildet aus den beiden anderen Grundvektoren, zuordnen. Denn nach (3) ist:

$$\begin{aligned} \mathfrak{i} &= V\mathfrak{j}\mathfrak{k} = -V\mathfrak{k}\mathfrak{j} \\ \mathfrak{j} &= V\mathfrak{k}\mathfrak{i} = -V\mathfrak{i}\mathfrak{k} \\ \mathfrak{k} &= V\mathfrak{i}\mathfrak{j} = -V\mathfrak{j}\mathfrak{i}. \end{aligned} \tag{4a}$$

Ferner ist:
$$V\mathfrak{i}\mathfrak{i} = V\mathfrak{j}\mathfrak{j} = V\mathfrak{k}\mathfrak{k} = 0$$
oder allgemein:
$$V\mathfrak{A}\mathfrak{A} = 0$$
und auch:
$$V\mathfrak{A}(-\mathfrak{A}) = 0.$$

In der Gleichung
$$\mathfrak{C} = V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$
wird $\mathfrak{C}$ auch das Vektorprodukt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ genannt. Will man dieses durch die Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach den Richtungen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ ausdrücken, so zerlegt man zunächst die Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ und erhält:

$$\mathfrak{C} = V(\mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3)(\mathfrak{i}B_1 + \mathfrak{j}B_2 + \mathfrak{k}B_3).$$

Man achtet darauf, daß bei Ausführung der Produktenbildung die Reihenfolge innegehalten werden muß.

Man erhält dann:

$$\left\{ \begin{aligned} \mathfrak{C} = & V\mathfrak{i}A_1\mathfrak{i}B_1 + V\mathfrak{i}A_1\mathfrak{j}B_2 + V\mathfrak{i}A_1\mathfrak{k}B_3 \\ & + V\mathfrak{j}A_2\mathfrak{i}B_1 + V\mathfrak{j}A_2\mathfrak{j}B_2 + V\mathfrak{j}A_2\mathfrak{k}B_3 \\ & + V\mathfrak{k}A_3\mathfrak{i}B_1 + V\mathfrak{k}A_3\mathfrak{j}B_2 + V\mathfrak{k}A_3\mathfrak{k}B_3. \end{aligned} \right. \tag{5}$$

Diejenigen Glieder sind hiervon gleich null, welche als Faktoren $V\mathfrak{i}\mathfrak{i}$, $V\mathfrak{j}\mathfrak{j}$, $V\mathfrak{k}\mathfrak{k}$ enthalten. Unter Berücksichtigung von (4a) erhält man, indem man nach den Faktoren von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$ und $\mathfrak{k}$ ordnet:

$$\begin{aligned} V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = & \mathfrak{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathfrak{j}(A_3B_1 - A_1B_3) \\ & + \mathfrak{k}(A_1B_2 - A_2B_1). \end{aligned} \tag{5a}$$

Ein Blick auf (5) zeigt, daß bei Umkehrung der Richtungen von $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ die Komponenten von $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ihr Vorzeichen nicht ändern (axialer Vektor). Denn es ist:

$$V(-\mathfrak{i})(-\mathfrak{j}) = V\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}$$

und so weiter.

Geht man zu einem Linkssystem über und soll dabei die Richtung von $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ unverändert bleiben, so ist das Vorzeichen zu ändern, d. h. der im Rechtssystem als $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bezeichnete Vektor ist im Linkssystem $V\mathfrak{B}\mathfrak{A}$. Das Vektorprodukt $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ läßt sich auch durch folgende Determinante darstellen:

$$\begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}.$$

Da man eine beliebig begrenzte ebene Fläche in eine sehr große Anzahl von Parallelogrammen einteilen kann, welche sämtlich im selben Sinne traciert sind, so ergibt die Summierung dieser Elementarflächen einen Vektor, welcher die Gesamtfläche repräsentiert. Eine begrenzte ebene Fläche ist daher durch einen Vektor darstellbar, dessen Tensor gleich ist dem Inhalt der Fläche und dessen Richtung durch die Tracierung bestimmt ist.

Man addiert Flächenteile, auch wenn diese nicht in derselben Ebene liegen, indem man die zugeordneten Vektoren addiert. Da eine beliebig gekrümmte Fläche als aus unendlich vielen ebenen Flächenelementen zusammengesetzt aufgefaßt werden kann, so ist auch eine gekrümmte Fläche durch einen Vektor darstellbar und zwar allgemein durch ein Integral:

$$\mathfrak{C} = \int d\mathfrak{g}, \tag{7}$$

wo $d\mathfrak{g}$ ein Flächenelement repräsentiert.

Eine Fläche wird in drei zueinander senkrechte Komponenten zerlegt, indem man den zugeordneten Vektor in seine drei Komponenten zerlegt, d. h. auf die Normalen der drei Ebenen projiziert, welche durch die betreffenden drei Richtungen bestimmt sind.

Bezüglich der Vektoren, welche den Begrenzungsflächen eines geschlossenen Raumes zugeordnet sind, besteht die Vereinbarung, daß diese Vektoren immer nach außen weisen.

Projiziert man die Vektorflächen eines Polyeders orthogonal auf eine beliebige Ebene, so ist die Summe der Projektionen gleich null.

Der Beweis dieses Satzes stützt sich auf das bekannte Theorem, daß der Inhalt der Projektion einer ebenen Fläche auf eine beliebige Ebene gleich ist der Fläche multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den die Fläche mit der Projektionsebene bildet. Die Projektion des der Fläche zugeordneten Vektors auf die Normale zur Projektionsebene ist gleich dem zugeordneten Vektor multipliziert mit dem Kosinus, den derselbe mit der Normalen bildet. Folglich ist der projizierte Vektor der projizierten Fläche zugeordnet.

Projiziert man nun die Flächen eines Polyeders auf eine beliebige Ebene, so wird man eine Doppelschicht von Projektionsflächen erhalten, von denen die eine den der Ebene zugewandten Vektoren und die andere den der Ebene abgewandten entspricht. Den ersteren kommt das entgegengesetzte Vorzeichen zu, wie den letzteren. Daher ist die Summe der den Projektionsflächen zugeordneten Vektoren null. Da dieser Schluß für jede Projektionsebene richtig bleibt, so ergibt sich der Satz, daß die Summe der Vektorflächen eines Polyeders gleich null ist.

Es läßt sich nachweisen, daß der Satz bezüglich der Summe der Projektionen der Flächen eines Polyeders nicht auf orthogonale Projektionen beschränkt ist.

Der eben bewiesene Satz kann nach Wilson-Gibbs dazu dienen, zu zeigen, daß, wenn

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{C} + \mathfrak{D},$$

dann

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = V\mathfrak{C}\mathfrak{B} + V\mathfrak{D}\mathfrak{B}.$$

Die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ seien in der Figur graphisch dargestellt.

Die Ebene von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ falle mit der Papierebene nicht zusammen. Man ziehe $\mathfrak{C}'$ parallel $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}'$ parallel $\mathfrak{D}$ und

verbinde P mit P'. Man erhält so ein Prisma, dessen Vektorflächen zur Summe null ergeben. Von diesen sind die von $\mathfrak{A}'$, $\mathfrak{C}'$, $\mathfrak{D}'$ und von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$ begrenzten Flächen nach Konstruktion gleich, mit entgegengesetztem Vorzeichen; folglich ist:

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} + \mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} + \mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{D} = 0.$$

Bei der Reihenfolge der Faktoren in diesen drei Vektorprodukten wurde darauf geachtet, daß die Vektorflächen nach außen weisen müssen. Die letzte Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{B} + \mathrm{V}\mathfrak{D}\mathfrak{B}.$$

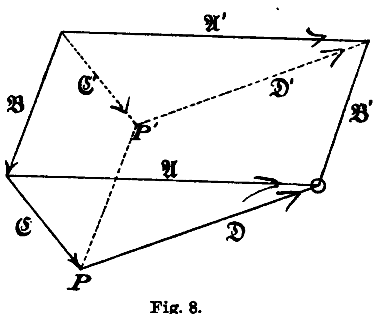


Fig. 8.

Für den Fall, daß die Ebene von $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$ in der Ebene von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegt, ist der Beweis noch einfacher, indem die in Frage kommenden Flächenvektoren sämtlich parallel sind, und man hat daher nur zu zeigen, daß der Tensor von $\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ gleich ist der Summen der Tensoren von $\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ und $\mathrm{V}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$. Dies folgt aus der Gleichheit der Dreiecke gebildet aus $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ und aus $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$. Denn subtrahiert man von der Fläche des Parallelogramms $\mathfrak{A}\mathfrak{B}'\mathfrak{A}'\mathfrak{B}$ die Fläche $\mathfrak{A}'\mathfrak{C}'\mathfrak{D}'$ und addiert $\mathfrak{A}\mathfrak{C}\mathfrak{D}$, so erhält man den Tensor von $\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{B}$ plus dem Tensor von $\mathrm{V}\mathfrak{D}\mathfrak{B}$, womit obige Gleichung bewiesen ist.

Die Darstellung einer Fläche durch einen Vektor bietet manche Vorteile. Es ist aber darauf hinzuweisen, daß dieser Vektor sich von den rein physikalischen Vektoren dadurch unterscheidet, daß er sich nicht auf einen bestimmten Punkt im Raume bezieht; es sei denn, daß ausdrücklich festgesetzt wird — und dies ist für die Lösung einer gewissen Klasse von Problemen von Nutzen —, daß er sich auf den Schwerpunkt der Fläche beziehen soll.

Der in der theoretischen Physik häufig vorkommende Vektor $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bezieht sich auf *einen* bestimmten Punkt im Raume, für den die Werte der Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ der Richtung und Größe nach als bekannt angenommen werden.

Der Vektor $V\mathfrak{A}\mathfrak{r}$ bezieht sich auf dieselbe Stelle im Raume, auf welche sich $\mathfrak{A}$ bezieht. $\mathfrak{r}$ denkt man sich von einem festen Punkte aus nach jener Stelle gezogen. Mit anderen Worten, $V\mathfrak{A}\mathfrak{r}$ bezieht sich auf *den Endpunkt des Vektors* $\mathfrak{r}$.

II. Das skalare Produkt.

Außer dem Vektorprodukt gibt es ein Produkt von zwei Vektoren, welches skalaren Charakter hat. Dasselbe wird durch einfache Nebeneinanderstellung der beiden Faktoren gekennzeichnet. Der Zahlenwert dieses Produktes ist bestimmt durch die Definition:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Bilden $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ einen rechten Winkel miteinander, so wird das Vektorprodukt null.

Die Bedingung dafür, daß $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$ senkrecht steht, ist daher:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0.$$

Fallen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in dieselbe Richtung, so ist:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB.$$

Daher auch:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^2 = A^2$$

und:

$$\mathfrak{i}\mathfrak{i} = \mathfrak{j}\mathfrak{j} = \mathfrak{k}\mathfrak{k} = 1$$

$$\mathfrak{i}\mathfrak{j} = \mathfrak{i}\mathfrak{k} = \mathfrak{j}\mathfrak{k} = 0.$$

Will man $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ als Funktion der Komponenten von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ nach den Richtungen $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ angeben, so erhält man:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (\mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3)(\mathfrak{i}B_1 + \mathfrak{j}B_2 + \mathfrak{k}B_3).$$

Führt man die Produktbildung aus und berücksichtigt dann, daß die Glieder mit den Faktoren $\mathfrak{i}\mathfrak{j}$, $\mathfrak{i}\mathfrak{k}$, $\mathfrak{j}\mathfrak{k}$ verschwinden, so erhält man:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3.$$

Zerlegt man $\mathfrak{A}$ in zwei beliebige Summanden $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{D}$, so bleibt die Gleichung:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$$

doch richtig; d. h. es ist:

$$(\mathfrak{C} + \mathfrak{D})\mathfrak{B} = \mathfrak{C}\mathfrak{B} + \mathfrak{D}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

oder:

$$CB(\cos \mathfrak{C}\mathfrak{B}) + DB\cos(\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = AB\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Dividiert man durch B, so erhält man:

$$C\cos(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) + D\cos(\mathfrak{D}\mathfrak{B}) = A\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}).$$

Wie wir nun früher gesehen haben [siehe Gleichung (2)], ist $A\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$ der Tensor der Projektion von $\mathfrak{A}$ auf die Richtung von $\mathfrak{B}$. Ebenso sind $C\cos(\mathfrak{C}\mathfrak{B})$ und $D\cos(\mathfrak{D}\mathfrak{B})$ die Tensoren der Projektionen von $\mathfrak{C}$, bezw. von $\mathfrak{D}$ auf $\mathfrak{B}$.

Die Summe der letzteren Projektionen ist aber nach der Figur gleich der Projektion von $\mathfrak{A}$ auf $\mathfrak{B}$, womit die Behauptung bewiesen ist.

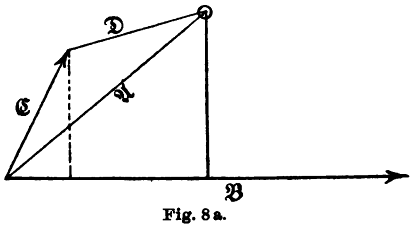


Fig. 8a.

Die skalaren Produkte von zwei Vektoren spielen eine wichtige Rolle in der Physik. Die mechanische Arbeit wird z. B. durch das skalare Produkt aus Kraft und Weg ausgedrückt. Ein anderes skalares Produkt, welches ebenfalls häufig auftritt, ist der Vektorfluß durch eine Fläche. Man versteht hierunter den Ausdruck:

$$\int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{g},$$

wenn $\mathfrak{A}$ einen Vektor bedeutet in einem Raume, in welchem die Fläche $\mathfrak{g}$ konstruiert ist. Ist $\mathfrak{A}$ in dem betreffenden Raume konstant und $\mathfrak{g}$ eine ebene begrenzte Fläche, so ist der Vektorfluß:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{g}.$$

Der Vektorfluß läßt sich mit dem Begriff der Kraftlinien in Beziehung setzen. Man kann nämlich den Tensor A einer

Kraft für einen bestimmten Punkt dadurch angeben, daß man sagt, die Kraft sende durch die senkrecht zu ihrer Richtung in dem Punkte konstruierte Einheitsfläche A Kraftlinien. Offenbar ist dann die Anzahl der Kraftlinien, welche die Fläche $\mathfrak{g}$ durchsetzen:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{g}$$

bezw.:

$$\int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{g}.$$

Zu jedem $d\mathfrak{g}$ gehört derjenige Wert von $\mathfrak{A}$, welcher im Schwerpunkte des Flächenelementes besteht.

§ 5.

Produkte aus drei Faktoren.

Da man verschiedenartige Produkte aus drei Faktoren bilden kann, so ist es erforderlich, die Bezeichnungsweise so zu wählen, daß ein Zweifel über die auszuführenden Operationen ausgeschlossen ist. — Soll zunächst das skalare Produkt von zwei Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ mit einem dritten Vektor $\mathfrak{C}$ multipliziert werden, so wird dieses dreifache Produkt gekennzeichnet durch

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C}.$$

Dieser Ausdruck ist ein Vektor in der Richtung von $\mathfrak{C}$, dessen Tensor gleich ist $ABC \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$. Daher kann gesetzt werden:

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 ABC \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \tag{9}$$

Soll ferner das Vektorprodukt aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ skalar mit dem Vektor $\mathfrak{C}$ multipliziert werden, so wird das Resultat ausgedrückt durch:

$$\mathfrak{C}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Dieser skalare Ausdruck gibt das Volumen eines Parallelepipeds an, welches $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ zu Seiten hat. Denn bildet man graphisch $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch Pfeile ab und vervollständigt $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ zum Parallelogramm, so ist $\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{g}$ die Grundfläche. Die Höhe des Körpers ist gleich C multipliziert mit dem Kosinus des Winkels, den $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{g}$ bildet.

Man erkennt, daß der Ausdruck negativ oder positiv werden kann, je nach dem Winkel, den $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{g}$, bezw. $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{B}$ bildet.

Von besonderer Wichtigkeit ist der Ausdruck $\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, wenn derselbe als der Vektorfluß von $\mathfrak{C}$ durch die Fläche $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ aufgefaßt wird.

Denkt man sich einen geschlossenen Raum, in welchem ein Vektor $\mathfrak{A}$ kontinuierlich verteilt ist, durch drei Scharen von senkrecht zueinander stehenden Ebenen in unendlich viele Raumelemente zerlegt, so ist der Vektorfluß durch die Oberfläche des begrenzten Raumes gleich der Summe der Vektorflüsse durch die Oberflächen der Raumelemente. Da nämlich jede Vektorfläche eines im Innern befindlichen Raumelementes das entgegengesetzte Vorzeichen hat wie die anstoßende Fläche des benachbarten Raumelementes, und bei der Bildung des Vektorflusses dieser beiden Flächen jede derselben mit demselben Vektor multipliziert wird, so ist die Summe der Vektorflüsse sämtlicher Doppelflächen null, und es bleiben daher nur die Vektorflüsse der äußeren Begrenzungsflächen des geschlossenen Raumes zu addieren.

Bezeichnet man ein Oberflächenelement mit $d\mathfrak{g}$ und den gesamten Vektorfluß durch Q, so ist:

$$Q = \int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{g}.$$

Q wird das Oberflächenintegral von $\mathfrak{A}$ genannt.

Zerlegt man $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ in ihre Komponenten und führt dann die Multiplikation aus, so findet man:

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= (\mathfrak{i}C_1 + \mathfrak{j}C_2 + \mathfrak{k}C_3)[\mathfrak{i}(A_2B_3 - A_3B_2) \\ &\quad + \mathfrak{j}(A_3B_1 - A_1B_3) + \mathfrak{k}(A_1B_2 - A_2B_1)] \\ &= C_1(A_2B_3 - A_3B_2) + C_2(A_3B_1 - A_1B_3) \\ &\quad + C_3(A_1B_2 - A_2B_1).\end{aligned}$$

Hierfür läßt sich auch schreiben:

$$\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} C_1, & C_2, & C_3 \\ A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Diese Determinante läßt sich aber ferner schreiben:

$$\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} B_1, & B_2, & B_3 \\ C_1, & C_2, & C_3 \\ A_1, & A_2, & A_3 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt, daß:

$$\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}V\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{B}V\mathfrak{C}\mathfrak{A}, \tag{11}$$

d. h., man kann $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ cyklisch vertauschen. Man erkennt ebenfalls, daß diese Produkte positiv sind, wenn die Vektoren $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ in ihrer Aufeinanderfolge einem Rechtssystem entsprechen.

Die Vorzeichen in den Ausdrücken von Gleichung (11) kehren sich natürlich um, wenn die Reihenfolge der Faktoren im Vektorprodukt geändert wird.

Außer dem skalaren dreifachen Produkt gibt es ein vektorielles:

$$\mathfrak{D} = V\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B}. \tag{12}$$

Die Deutung dieses Symbols ist, daß aus $\mathfrak{C}$ und $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ das Vektorprodukt zu bilden ist. $\mathfrak{D}$ steht also auf $\mathfrak{C}$ und auf $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ senkrecht. Dann ist aber:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{C} = 0$$

$$\mathfrak{D}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = 0.$$

Letztere Beziehung bedeutet nun, daß $\mathfrak{D}$ in der Ebene liegt, welche $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ miteinander bilden. Daher kann für $\mathfrak{D}$ gesetzt werden:

$$\mathfrak{D} = m\mathfrak{A} + n\mathfrak{B}, \tag{13}$$

indem, wie eine einfache Überlegung zeigt, jeder Vektor, welcher in der Ebene von zwei gegebenen Vektoren liegt, durch einen derartigen Ausdruck darstellbar ist. Ferner liefert:

$$\mathfrak{D}\mathfrak{C} = 0$$

$$m\mathfrak{A}\mathfrak{C} + n\mathfrak{B}\mathfrak{C} = 0,$$

oder:

$$m : n = (-\mathfrak{B}\mathfrak{C}) : \mathfrak{A}\mathfrak{C}. \tag{14}$$

Dadurch ist $\mathfrak{D}$ bis auf einen unbestimmt skalaren Faktor K bestimmt, denn (13) und (14) liefern:

$$K\mathfrak{D} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}). \tag{15}$$

Um die Konstante K zu bestimmen, stellen wir folgende Überlegung an. Der Tensor von $\mathfrak{D}$ wird seinen größten Wert erreichen, wenn $\mathfrak{A}$ senkrecht auf $\mathfrak{B}$ steht und wenn $\mathfrak{C}$ mit $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ koplanar ist. Dann ist nämlich:

$$D = ABC.$$

Da K konstant ist, so wird KD seinen größten Wert erreichen, wenn, wie ein Blick auf den Ausdruck:

$$\mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C})$$

zeigt, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ gleich gerichtet und $\mathfrak{A} \perp \mathfrak{C}$ ist. Dann wird:

$$KD = ABC.$$

Dies ist aber infolge des obigen Wertes für D nur möglich, wenn:

$$K = 1.$$

Daher gilt die Gleichung:

$$\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}).$$

Stößt man bei Ableitung eines Ausdruckes auf rein vektoranalytischem Wege auf Schwierigkeiten, so steht immer die semikartesische Methode zur Verfügung. Doch muß dieses Hilfsmittel als ein Notbehelf betrachtet werden. Die semikartesische Methode ist meist weitläufig. Um zu zeigen, wie man diese anwendet, sei im folgenden der Ausdruck:

$$\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

entwickelt.

Wir drücken zunächst die Vektoren $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ durch ihre Komponenten in der $\mathfrak{i}$-, $\mathfrak{j}$-, $\mathfrak{k}$-Richtung aus und erhalten den bereits abgeleiteten Wert von $\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, nämlich:

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{i}(A_2 B_3 - A_3 B_2) + \mathfrak{j}(A_3 B_1 - A_1 B_3) + \mathfrak{k}(A_1 B_2 - A_2 B_1)$$

Wir setzen zur Vereinfachung:

$$E_1 = A_2 B_3 - A_3 B_2$$
$$E_2 = A_3 B_1 - A_1 B_3$$
$$E_3 = A_1 B_2 - A_2 B_1.$$

Dann können wir setzen:

$$\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{D} = \mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{E}.$$

Nun ist:

$$\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{E} = \mathfrak{i}(C_2E_3 = C_3E_2) + \mathfrak{j}(C_3E_1 - C_1E_3) + \mathfrak{k}(C_1E_2 - C_2E_1).$$

Man setzt in diesem Ausdruck die Werte von E_1, E_2, E_3 ein und ordnet in folgender Weise:

$$\begin{aligned}\mathfrak{D} = {} & \mathfrak{i}A_1(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3)\\ & + \mathfrak{j}A_2(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3)\\ & + \mathfrak{k}A_3(B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3)\\ & - \mathfrak{i}B_1(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3)\\ & - \mathfrak{j}B_2(A_1C_1 + A_2C_3 + A_3C_3)\\ & - \mathfrak{k}B_3(A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3).\end{aligned}$$

Für die Klammerausdrücke erhält man:

$$B_1C_1 + B_2C_2 + B_3C_3 = \mathfrak{B}\mathfrak{C}$$
$$A_1C_1 + A_2C_2 + A_3C_3 = \mathfrak{A}\mathfrak{C}.$$

Daher:

$$\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\cdot(\mathfrak{C}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}). \tag{16}$$

Kompliziertere Produktbildungen kommen in der theoretischen Physik seltener vor und können immer leicht auf die abgeleiteten Doppelprodukte und dreifachen Produkte zurückgeführt werden. Es seien noch folgende Formeln angegeben:

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = (\mathfrak{A}\mathfrak{C})(\mathfrak{B}\mathfrak{D}) - (\mathfrak{A}\mathfrak{D})(\mathfrak{B}\mathfrak{C}). \tag{17}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{D} &= (\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{D})\mathfrak{B} - (\mathfrak{B}\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{D})\mathfrak{A}\\ &= (\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{D})\mathfrak{C} - (\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C})\mathfrak{D}.\end{aligned} \tag{18}$$

Von Wichtigkeit ist die Tatsache, daß man bei vektoriellen sowohl, wie auch bei skalaren Produkten die Tensoren als Faktoren herausschreiben kann, indem man an Stelle der Vektoren in den Produkten die Einheitsvektoren setzt: z. B.:

$$\left\{\begin{aligned}\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= AB(\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1)\\ \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} &= AB\mathrm{V}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\\ \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} &= ABC\mathrm{V}\mathfrak{A}_1\mathrm{V}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1\\ \mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B}\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{D} &= ABCD\mathrm{V}\mathfrak{A}_1\mathfrak{B}_1\mathrm{V}\mathfrak{C}_1\mathfrak{D}_1.\end{aligned}\right. \tag{18a}$$

Man kann hieraus noch den weiteren Schluß ziehen, daß man die einzelnen Faktoren zu beliebigen Einheitsvektoren, welche in dem Produkt vorkommen, setzen kann: z. B.:

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = A\mathrm{V}(\mathfrak{A}_1 B)\mathfrak{B}_1$$

$$\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{C} = AB\mathrm{V}\mathfrak{A}_1 C\mathrm{V}\mathfrak{B}_1\mathfrak{C}_1$$

$$= \mathrm{V}\mathfrak{A}_1 B\mathrm{V}(\mathfrak{B}_1 C)(\mathfrak{C}_1 A).$$

§ 6.

Über Differentiation.

Allgemeines.

Bei der Untersuchung der funktionellen Abhängigkeit der Vektoren von anderen Größen werden wir naturgemäß zu der Auswertung von Differentialkoeffizienten und überhaupt zu Differentiationen geführt.

Betrachten wir einen physikalischen Vektor in seiner Abhängigkeit von anderen Größen.

In einem Wasserstrom wird in jedem Punkte die Geschwindigkeit des Wassers eine bestimmte Größe und eine bestimmte Richtung haben. Diese Geschwindigkeit ist daher in jedem Zeitpunkte eine bestimmte Vektorfunktion der Koordinaten des Punktes oder kurz des Raumes. Man hat sich in diesem Falle den die Geschwindigkeit darstellenden Vektor als kontinuierlich im Raum verteilt vorzustellen:

$$\mathfrak{A} = f(x, y, z).$$

Ändert sich diese Geschwindigkeit mit der Zeit, so ist:

$$\mathfrak{A} = f(x, y, z, t).$$

Beschränkt man sich darauf, die zeitlichen Änderungen der Geschwindigkeit des Wassers in einem bestimmten Punkte zu untersuchen, so wird der Koeffizient

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dt}$$

von Interesse sein. Dieser Differentialquotient ist ohne weiteres verständlich.

Nicht so einfach liegen die Verhältnisse bei dem vorerst genannten Falle, wo die Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$ in einem Punkte in ihrer Abhängigkeit von der Lage des Punktes im Raume untersucht werden soll. Legt man einen Punkt als Anfangspunkt eines Radiusvektors fest, von dem aus der Radius nach beliebigen Punkten des Raumes gezogen werden kann, so läßt sich die Geschwindigkeit des Wassers als eine Funktion dieses Radiusvektors angeben. Im allgemeinen wird jeder sehr kleinen Änderung des Radiusvektors eine sehr kleine Änderung von $\mathfrak{A}$ entsprechen.

Die Bildung des Differentialquotienten $\frac{d\mathfrak{A}}{d\mathfrak{r}}$ ist aber nicht angängig, weil der Division eines Vektors durch einen anderen Vektor kein bestimmter Sinn beigelegt werden kann. Dies hängt damit zusammen, daß bei Kenntnis des Vektorproduktes zweier Vektoren und des einen Vektors der andere Vektor nicht bekannt ist.

Hingegen hat es einen Sinn zu fragen, welche Änderung $\mathfrak{A}$ erleidet, wenn man in der Richtung von $\mathfrak{r}$ um die Strecke dr weiter geht. In der Tat spielt der Koeffizient

$$\frac{d\mathfrak{A}}{dr}$$

eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik. Weiter unten wird dieser Koeffizient eingehender behandelt werden.

Man kann auch nach der Änderung fragen, welche der Vektor $\mathfrak{A}$ erleidet bei einer bloßen Richtungsänderung des Radiusvektors $\mathfrak{r}$, d. h. bei Konstanz vor r. Offenbar liegen die Werte von $\mathfrak{A}$, welche hier in Frage kommen, sämtlich auf einer Kugelfläche, welche mit dem Radius r um den Anfang des Radiusvektors beschrieben werden.

Das Differential von $\mathfrak{A}$ ist im allgemeinen ausdrückbar durch:

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 dA + A d\mathfrak{A}_1, \tag{19}$$

$$d\mathfrak{A} = \mathfrak{i}dA_1 + \mathfrak{j}dA_2 + \mathfrak{k}dA_3, \tag{20}$$

$$\begin{aligned}\mathfrak{A}d\mathfrak{A} &= (\mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3)(\mathfrak{i}dA_1 + \mathfrak{j}dA_2 + \mathfrak{k}dA_3) \\ &= A_1 dA_1 + A_2 dA_2 + A_3 dA_3.\end{aligned}$$

Da nun $\mathfrak{A}^2 = A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$, so folgt:

$$\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A} = A\,dA. \tag{21}$$

Dividiert man durch A, so erhält man:

$$\mathfrak{A}_1\,d\mathfrak{A} = dA. \tag{22}$$

Setzt man aus (19) den Wert von $d\mathfrak{A}$ ein, so ergibt sich:

$$\mathfrak{A}_1(\mathfrak{A}_1\,dA + A\,d\mathfrak{A}_1) = dA,$$

oder

$$dA + \mathfrak{A}\,d\mathfrak{A}_1 = dA.$$

Daher:

$$\mathfrak{A}\,d\mathfrak{A}_1 = 0; \tag{23}$$

d. h. $d\mathfrak{A}_1$ steht senkrecht auf $\mathfrak{A}$.

Hat man ein Vektorprodukt zu differentiieren, so ist die Reihenfolge zu beachten:

$$\frac{d}{dt}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathrm{V}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}\mathfrak{B} + \mathrm{V}\mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt}.$$

Es ist ferner:

$$\frac{d}{dt}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) = \mathfrak{A}\frac{d\mathfrak{B}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{d\mathfrak{A}}{dt}.$$

Ein Radiusvektor, dessen Anfang sich im Koordinatenanfangspunkt befindet, ist bestimmt durch:

$$\mathfrak{r} = \mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z$$

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{i}\,dx + \mathfrak{j}\,dy + \mathfrak{k}\,dz.$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned} \mathfrak{i}\,d\mathfrak{r} &= dx \\ \mathfrak{j}\,d\mathfrak{r} &= dy \\ \mathfrak{k}\,d\mathfrak{r} &= dz. \end{aligned} \tag{24}$$

Daher:

$$d\mathfrak{r}(\mathfrak{i} + \mathfrak{j} + \mathfrak{k}) = dx + dy + dz.$$

§ 7.

Eine hervorragende Rolle spielen die Differentialoperatoren, zu denen wir uns jetzt wenden wollen. Sie lassen sich alle von dem Hamiltonschen Operator ∇ ableiten.

∇ ist definiert durch:

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Man erkennt, daß ∇ als ein Vektor aufgefaßt werden kann, dessen Komponenten in der $\mathfrak{i}\mathfrak{j}\mathfrak{k}$-Richtung die Tensoren

$$\frac{\partial}{\partial x}, \ \frac{\partial}{\partial y}, \ \frac{\partial}{\partial z}$$

haben. Das Rechnen mit diesem und den daraus abgeleiteten Vektoroperatoren gewinnt sehr an Einfachheit, wenn die Operatoren wie andere Vektoren behandelt werden. Ein solches Verfahren ist durchaus wissenschaftlich und auf Grund der Theorie der Invarianten streng zu begründen. Übrigens bedienen wir uns auch auf anderen Gebieten derartiger symbolischer Methoden, so z. B. zur Lösung von gewöhnlichen Differentialgleichungen. Der Nachweis der Berechtigung des Verfahrens ist dann nach Lösung der Gleichung leicht zu erbringen, indem die Differentiation der Integralgleichung die ursprüngliche Differentialgleichung liefern muß.

Sollte bei einer derartigen Behandlung der Operatoren ein Zweifel über die Berechtigung des Verfahrens entstehen, so steht immer der Weg offen, den Operator in seine Komponenten aufzulösen und durch schrittweise Ausführung der Operationen das Resultat zu erzielen.

Wirkt der Operator ∇ auf einen Vektor, so ist das Resultat ein Skalar:

$$\begin{aligned} \nabla \mathfrak{A} &= \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3) \\ &= \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}. \end{aligned} \tag{26}$$

Man erkennt, daß bei Auflösung der Klammern die Ausdrücke $\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x}$ usw. sowohl die Rolle von Faktoren als wie von Differentialoperatoren spielen.

In der Tat ist dieser zweifache Charakter der Vektoroperatoren stets im Auge zu behalten und zwar besonders bei der Differentiierung von Produkten.

Der Ausdruck $\nabla \mathfrak{A}$ wird die Divergenz von $\mathfrak{A}$ genannt und auch mit *div* $\mathfrak{A}$ bezeichnet:

$$\nabla \mathfrak{A} = div\, \mathfrak{A}.$$

Die Deutung der Divergenz eines Vektors wird erleichtert, wenn wir sie mit dem früher besprochenen Vektorfluß in

Beziehung bringen. Wie gezeigt worden ist, läßt sich der Vektorfluß durch die Oberfläche eines geschlossenen Raumes auffassen als die Summe der Vektorflüsse, welche den Begrenzungsflächen der Volumelemente des Raumes zukommen. Man kann nun die Volumelemente als die Quellen auffassen, denen die elementaren Vektorflüsse entspringen, und der Gesamtvektorfluß durch die Oberfläche wäre dann durch die Ergiebigkeit sämtlicher Quellen der Raumelemente bestimmt.

Fassen wir ein beliebiges Raumelement ins Auge, so wird in dasselbe ein gewisser Fluß von $\mathfrak{A}$ eintreten und im allgemeinen ein unendlich wenig verschiedener Fluß von $\mathfrak{A}$ austreten. Der Überschuß des ausgetretenen über den eingetretenen Fluß wird nun die Ergiebigkeit des Raumelementes darstellen.

Ist die Raumeinteilung in der Weise erfolgt, daß die drei Scharen von Ebenen der yz-, der xz- und der xy-Ebene eines Koordinatensystems parallel sind, dessen x, y und z in den Richtungen $\mathfrak{i}\,\mathfrak{j}\,\mathfrak{k}$ zunehmen, so stellt $dx\,dy\,dz$ ein Volumelement dar, und die paarweise gegenüberliegenden sechs Flächen desselben sind $\pm\,\mathfrak{i}\,dy\,dz$, $\pm\,\mathfrak{j}\,dx\,dz$, $\pm\,\mathfrak{k}\,dy\,dx$.

Hat nun der Vektor an der Fläche $-\,\mathfrak{i}\,dy\,dz$ den Wert $\mathfrak{A}$, so wird er an der gegenüberliegenden Fläche $\mathfrak{i}\,dy\,dz$, welche um die Strecke dx davon entfernt liegt, den Wert haben:

$$\mathfrak{A} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x}\,dx.$$

Der Überschuß des austretenden über den eintretenden Vektorfluß, d. h. der gesamte Vektorfluß durch die betrachteten unendlich kleinen Seiten, ist daher:

$$\left(\mathfrak{A} + \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x}\,dx\right)\mathfrak{i}\,dy\,dz - \mathfrak{A}\,\mathfrak{i}\,dy\,dz,$$

oder:

$$\mathfrak{i}\,\frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Dieser Ausdruck läßt sich auch schreiben:

$$\mathfrak{i}\left(\mathfrak{i}\,\frac{\partial A_1}{\partial x} + \mathfrak{j}\,\frac{\partial A_2}{\partial x} + \mathfrak{k}\,\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)dx\,dy\,dz,$$

oder:

$$\frac{\partial A_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz.$$

Für die beiden anderen Seitenpaare gelten analoge Überlegungen. Wir fassen zusammen:

Der Überschuß des austretenden Flusses über den eintretenden durch die $\pm \mathfrak{i}\, dy\, dz$-Flächen ist, wie wir gezeigt haben:

$$\mathfrak{i}\, dy\, dz \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial x} dx = \frac{\partial A_1}{\partial x} dx\, dy\, dz.$$

Durch die $\pm \mathfrak{j}\; dx\, dz$-Flächen findet man analog:

$$\mathfrak{j}\, dx\, dz \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial y} dy = \frac{\partial A_2}{\partial y} dx\, dy\, dz.$$

Durch die $\pm \mathfrak{k}\; dx\, dy$-Flächen:

$$\mathfrak{k}\, dx\, dy \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial z} dz = \frac{\partial A_3}{\partial z} dx\, dy\, dz.$$

Der Vektorfluß, welcher dem Volumelement $dx\, dy\, dz = dv$ entspringt, ist daher:

$$\left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz,$$

folglich ist der gesamte Vektorfluß, welcher dem geschlossenen Raume entspringt:

$$\int \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) dv.$$

Wie früher gezeigt worden, ist der gesamte Vektorfluß durch das Oberflächenintegral von $\mathfrak{A}$ definiert. Daher ist:

$$\int \mathfrak{A}\, d\mathfrak{g} = \int \nabla \mathfrak{A}\, dv. \tag{27}$$

Dieser Satz wird als der Satz von Gauß bezeichnet.

Das Oberflächenintegral eines Vektors verschwindet, wenn die Divergenz des betreffenden Vektors null ist. Die Gleichung

$$\nabla \mathfrak{A} = 0 \tag{28}$$

heißt die hydrodynamische Gleichung. Sie enthält die Bedingung, daß eine Flüssigkeit, deren Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$ ist, inkompressibel sei.

Denkt man sich innerhalb einer unzusammendrückbaren, sich bewegenden Flüssigkeit einen Raum abgegrenzt, so wird

in jedem Zeitmoment ebensoviel Flüssigkeit aus diesem Raume ausfließen wie einfließen. Mit anderen Worten, die in jedem Momente im ganzen einfließende Flüssigkeit ist null.

Die Quantität einer Flüssigkeit, welche durch eine Fläche mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$ eintritt, ist aber $\int \mathfrak{A} d\mathfrak{g}$, d. h. gleich dem Oberflächenintegral von $\mathfrak{A}$ über $\mathfrak{g}$. Man erkennt hieraus, daß das Oberflächenintegral von $\mathfrak{A}$ über eine geschlossene Fläche null wird, wenn die Flüssigkeit unzusammendrückbar ist. Infolge des Gaußschen Satzes wird dann auch die Divergenz von $\mathfrak{A}$ null.

Das Beispiel einer strömenden Flüssigkeit hat noch einen weiteren Vorzug. Denkt man sich nämlich in einem Punkte eines abgegrenzten Raumes eine Quelle der Flüssigkeit, so wird der Vektorfluß der Geschwindigkeit $\mathfrak{A}$, d. h. die Strömung der Flüssigkeit durch die Begrenzungsfläche des Raumes unabhängig sein von der Gestaltung dieser Fläche, solange diese Fläche die Quelle einschließt. Diese Tatsache ist im Gaußschen Satze enthalten, indem bei der Bildung des Oberflächenintegrals von $\mathfrak{A}$ eine beliebige Fläche in Frage kommt, welche sämtliche Volumelemente mit Divergenzstellen einschließt.

Wirkt ∇ auf einen Radiusvektor, so ergibt sich:

$$\nabla \mathfrak{r} = \nabla(\mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z) = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3.$$

Wirkt der Operator ∇ auf einen Skalar, so ist das Resultat ein Vektor.

$$\nabla A = \mathfrak{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial A}{\partial z}. \tag{29}$$

Um mit dieser Operation ein Bild zu verbinden, denke man sich einen Körper, dessen Dichte variabel ist, und zwar in der Weise, daß sprungweise Dichteänderungen nicht vorkommen mögen. Die Dichte kann dann als stetige Funktion des Raumes dargestellt werden.

Legt man in dem Körper einen Punkt als Anfangspunkt eines Radiusvektors fest, so wird die Dichte in jedem Punkte eine eindeutige Funktion dieses Radiusvektors sein. Beachtet man das im Anschluß an Gleichung (2) Seite (6) Gesagte, so

wird man erkennen, daß ∇A in diejenige Richtung fällt, in der sich A am meisten ändert. Denn nur in dieser Richtung erreicht ∇A seinen größten Wert. — Geht man in der Richtung des Radiusvektors $\mathfrak{r}$ um die Strecke dr weiter, so wird sich A um dA geändert haben. Zu dem Endpunkte des Vektors $\mathfrak{r}_1(r + dr)$ gelangt man aber, indem man in der $\mathfrak{i}$-Richtung um dx, dann in der $\mathfrak{j}$-Richtung um dy und schließlich in der $\mathfrak{k}$-Richtung um dz weiter geht. Daher ist:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{\partial A}{\partial x}\frac{dx}{dr} + \frac{\partial A}{\partial y}\frac{dy}{dr} + \frac{\partial A}{\partial z}\frac{dz}{dr},$$

und nach Gleichung (24) nimmt die rechte Seite den Wert an:

$$\frac{dA}{dr} = \frac{\partial A}{\partial x}\mathfrak{i}\frac{d\mathfrak{r}}{dr} + \frac{\partial A}{\partial y}\mathfrak{j}\frac{d\mathfrak{r}}{dr} + \frac{\partial A}{dz}\mathfrak{k}\frac{d\mathfrak{r}}{dr}.$$

Bei konstantem $\mathfrak{r}_1$ ist aber:

$$d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 dr.$$

Daher:

$$\frac{dA}{dr} = \mathfrak{r}_1\left(\mathfrak{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial A}{\partial z}\right).$$

$$\frac{dA}{dr} = \mathfrak{r}_1(\nabla A). \tag{29}$$

$$dA = \mathfrak{r}_1 dr(\nabla A) = d\mathfrak{r}(\nabla A). \tag{30}$$

$\frac{dA}{dr}$ wird null, wenn $\mathfrak{r}_1$ senkrecht auf ∇A steht. Bezeichnet man daher die Flächen, auf welchen die Dichte A konstant ist, als Niveauflächen, so steht ∇A in jedem Punkte dieser Fläche auf der Niveaufläche senkrecht und fällt in die Richtung, in der sich A am meisten ändert. Für $\mathfrak{r}_1(\nabla A)$ kann $\frac{\mathfrak{r}}{r}(\nabla A)$ gesetzt werden; führt man die Multiplikation von $\frac{\mathfrak{r}}{r}$ mit ∇A aus, so ergibt sich:

$$\mathfrak{r}_1(\nabla A) = \frac{\mathfrak{i}r_1 + \mathfrak{j}r_2 + \mathfrak{k}r_3}{r}\left(\mathfrak{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial A}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{r_1}{r}\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{r_2}{r}\frac{\partial A}{\partial y} + \frac{r_3}{r}\frac{\partial A}{\partial y} = \left(\frac{\mathfrak{r}}{r}\nabla\right)A = (\mathfrak{r}_1\nabla)A.$$

Es ist also:

$$\mathfrak{r}_1(\nabla A) = (\mathfrak{r}_1\nabla)A. \tag{31}$$

Von häufigem Vorkommen ist der Ausdruck:

$$\nabla\frac{1}{r}.$$

Zunächst erkennt man leicht, daß der Tensor dieses Vektors den Wert

$$\frac{1}{r^2}$$

haben muß; denn in keiner Richtung kann sich ein reciproker Radiusvektor mehr ändern als um diesen Betrag. Bezeichnen wir einen Einheitsvektor, welcher in die noch unbekannte Richtung von $\nabla\frac{1}{r}$ fällt, mit $\mathfrak{c}_1$, so können wir setzen:

$$\nabla\frac{1}{r} = \mathfrak{c}_1\frac{1}{r^2}.$$

Anderseits wissen wir, daß:

$$(\mathfrak{r}_1\nabla)\frac{1}{r} = \mathfrak{r}_1\left(\nabla\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}.$$

Folglich:

$$\mathfrak{c}_1 = -\mathfrak{r}_1.$$

Daher findet man:

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}.$$

Bisher haben wir die Ausdrücke $\nabla\mathfrak{A}$, ∇A und $(\mathfrak{r}_1\nabla)A$ kennen gelernt. Diese Ausdrücke können als Produktbildungen aufgefaßt werden. Es liegt nun nahe, das Vektorprodukt aus ∇ und A zu untersuchen, d. h. den Ausdruck $V\nabla\mathfrak{A}$. Entwickeln wir diesen Ausdruck geradeso wie $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$, so folgt:

$$(32)\qquad V\nabla\mathfrak{A} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix},$$

oder:

$$(33)\quad V\nabla\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$$

Der Ausdruck $V\nabla\mathfrak{A}$ wird auch als der curl von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Der curl eines Vektors spielt eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik. Seine Bedeutung wird besonders bei Besprechung des Linienintegrals eines Vektors hervortreten.

Die Divergenz eines curls ist null. Es ist nämlich:

$$\text{div curl}\,\mathfrak{A} = \nabla V \text{curl}\,\mathfrak{A} = \nabla V\nabla\mathfrak{A}.$$

Durch cyklische Vertauschung nimmt letzterer Ausdruck die Form an:

$$\nabla V \nabla \mathfrak{A} = (V \nabla \nabla) \mathfrak{A}.$$

Ein Vektorprodukt, dessen beide Faktoren gleich sind, ist aber null. Daher:

$$\text{(33a)} \qquad \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{A} = 0.$$

In dem Ausdruck

$$V \nabla \mathfrak{A} = \operatorname{curl} \mathfrak{A}$$

kann $\mathfrak{A}$ auch durch ein Vektorprodukt ersetzt werden:

$$\operatorname{curl} V \mathfrak{C} \mathfrak{D} = V \nabla V \mathfrak{C} \mathfrak{D}.$$

Da der Operator ∇ auf $\mathfrak{C}$ sowohl wie auf $\mathfrak{D}$ einwirken soll, so läßt sich auch schreiben:

$$V \nabla V \mathfrak{C} \mathfrak{D} = V \nabla_{\mathfrak{C}} V \mathfrak{C} \mathfrak{D} + V \nabla_{\mathfrak{D}} V \mathfrak{C} \mathfrak{D},$$

oder:

$$V \nabla V \mathfrak{C} \mathfrak{D} = \operatorname{curl}_{\mathfrak{C}} V \mathfrak{C} \mathfrak{D} + \operatorname{curl}_{\mathfrak{D}} V \mathfrak{C} \mathfrak{D}.$$

Für $V \nabla_{\mathfrak{C}} V \mathfrak{C} \mathfrak{D}$ läßt sich aber auch nach (16) setzen:

$$V \nabla_{\mathfrak{C}} V \mathfrak{C} \mathfrak{D} = (\mathfrak{D} \nabla) \mathfrak{C} - (\nabla \mathfrak{C}) \mathfrak{D}.$$

Bei der Aufeinanderfolge der Faktoren in den Produkten $\mathfrak{D}\nabla$ und $\nabla\mathfrak{C}$ ist dem Umstande Rechnung getragen, daß nur $\mathfrak{C}$ variiert werden soll. In derselben Weise erhält man:

$$V \nabla_{\mathfrak{D}} V \mathfrak{C} \mathfrak{D} = (\nabla \mathfrak{D}) \mathfrak{C} - (\mathfrak{C} \nabla) \mathfrak{D}.$$

Im ganzen erhält man daher:

$$\operatorname{curl} V \mathfrak{C} \mathfrak{D} = (\mathfrak{D} \nabla) \mathfrak{C} - \mathfrak{D} (\nabla \mathfrak{C}) + (\nabla \mathfrak{D}) \mathfrak{C} - (\mathfrak{C} \nabla) \mathfrak{D},$$

oder:

$$\text{(34)} \quad \operatorname{curl} V \mathfrak{C} \mathfrak{D} = (\mathfrak{D} \nabla) \mathfrak{C} - (\mathfrak{C} \nabla) \mathfrak{D} + \mathfrak{C} \operatorname{div} \mathfrak{D} - \mathfrak{D} \operatorname{div} \mathfrak{C}.$$

Von Interesse ist der curl eines Vektorprodukts, in welchem der eine Faktor konstant, der andere ein Radiusvektor ist.

In dem Ausdruck:

$$\operatorname{curl} V \mathfrak{C} \mathfrak{r}$$

sei $\mathfrak{C}$ ein konstanter Vektor und $\mathfrak{r}$ ein Radiusvektor. Entwickelt man noch (34), so ergibt sich:

$$\operatorname{curl} V \mathfrak{C} \mathfrak{r} = (\mathfrak{r} \nabla) \mathfrak{C} - (\mathfrak{C} \nabla) \mathfrak{r} + \mathfrak{C} \operatorname{div} \mathfrak{r} - \mathfrak{r} \operatorname{div} \mathfrak{C}.$$

Nun ist $(\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{r}\operatorname{div}\mathfrak{C}$ null wegen der Konstanz von $\mathfrak{C}$, und es folgt:

$$\operatorname{curl} V\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \mathfrak{C}\operatorname{div}\mathfrak{r} - (\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{r}.$$

Wie früher gezeigt worden ist, nimmt $\operatorname{div}\mathfrak{r}$ den Wert 3 an. Daher:

$$(\nabla\mathfrak{r})\mathfrak{C} = \mathfrak{C}(\nabla\mathfrak{r}) = 3\mathfrak{C}.$$

Ferner ist:

$$(\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{r} = \left(C_1\frac{\partial}{\partial x} + C_2\frac{\partial}{\partial y} + C_3\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathfrak{i}x + \mathfrak{j}y + \mathfrak{k}z)$$
$$= \mathfrak{i}C_1 + \mathfrak{j}C_2 + \mathfrak{k}C_3 = \mathfrak{C}.$$

Deshalb kann gesetzt werden:

$$V\nabla_{\mathfrak{r}}V\mathfrak{C}\mathfrak{r} = \operatorname{curl}_{\mathfrak{r}}V\mathfrak{C}\mathfrak{r} = 2\mathfrak{C}. \tag{35}$$

Das Symbol $\operatorname{curl}_{\mathfrak{r}}$ bedeutet, daß die Variation nur auf den Faktor $\mathfrak{r}$ des Vektorprodukts $V\mathfrak{C}\mathfrak{r}$ zu erstrecken ist. Zu bemerken ist, daß:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{r} = 0.$$

Denn es ist:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{r} = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix}.$$

Von Wichtigkeit ist ferner der Ausdruck:

$$\operatorname{curl}(\varphi\mathfrak{A}),$$

wo φ einen beliebigen Skalar bezeichnet. Beachtet man, daß man ein Produkt variiert, indem man den einen Faktor bei Konstanthaltung des anderen variiert, dann den zweiten bei Konstanthaltung des ersteren und dann addiert, so kann man setzen:

$$\operatorname{curl}(\varphi\mathfrak{A}) = V\nabla(\varphi\mathfrak{A}) = V(\nabla\varphi)\mathfrak{A} + V\nabla\mathfrak{A},$$

oder:

$$\operatorname{curl}(\varphi\mathfrak{A}) = V(\nabla\varphi)\mathfrak{A} + \varphi\operatorname{curl}\mathfrak{A}. \tag{35a}$$

Ebenso wie man $V\nabla V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ als dreifaches Vektorprodukt auffassen kann, so ist es gestattet, den Ausdruck:

$$\nabla V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$$

als Produkt der Faktoren ∇ und $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ anzusprechen.

Beachten wir, daß ∇ sowohl auf $\mathfrak{A}$ als auf $\mathfrak{B}$ variierend einwirken soll, so können wir schreiben:

$$\nabla V \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \nabla_{\mathfrak{A}} V \mathfrak{A}\mathfrak{B} + \nabla_{\mathfrak{B}} V \mathfrak{A}\mathfrak{B}.$$

Durch cyklische Vertauschung kann daher auch gesetzt werden:

$$\nabla V \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B} V \nabla \mathfrak{A} - \mathfrak{A} V \nabla \mathfrak{B} = \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B},$$

oder:

(35b) $$\operatorname{div} V \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B} \operatorname{curl} \mathfrak{A} - \mathfrak{A} \operatorname{curl} \mathfrak{B}.$$

Ein Operator, welcher sich aus dem Hamiltonschen ableiten läßt, indem man diesen mit sich selbst multipliziert, ist:

$$\nabla^2.$$

Der Ausdruck ∇^2 wird der Laplacesche Operator genannt und ist definiert durch:

$$\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

z. B.:

(35c) $$\nabla^2 \mathfrak{A} = \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathfrak{A}^2}{\partial z^2},$$

oder auch:

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = \mathfrak{i} \nabla^2 A_1 + \mathfrak{j} \nabla^2 A_2 + \mathfrak{k} \nabla^2 A_3.$$

Wirkt ∇^2 auf einen Skalar ein, so kann auch geschrieben werden:

(35d) $$\nabla^2 A = \nabla(\nabla A).$$

Denn:

(35e) $$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} = \left(\mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}\right) \left(\mathfrak{i}\frac{\partial A}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial A}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial A}{\partial z}\right).$$

Eine solche Trennung der Faktoren ∇ ist jedoch nicht statthaft, wenn ∇^2 auf einen Vektor wirkt. Denn offenbar ist:

$$\nabla(\nabla \mathfrak{A}) = \nabla \frac{\partial A_1}{\partial x} + \nabla \frac{\partial A_2}{\partial y} + \nabla \frac{\partial A_3}{\partial z},$$

und dieser Wert ist verschieden von:

$$\nabla^2 \mathfrak{A} = \mathfrak{i} \nabla^2 A_1 + \mathfrak{j} \nabla^2 A_2 + \mathfrak{k} \nabla^2 A_3.$$

In der theoretischen Physik kommt häufig der Operator curl^2 vor:

$$\mathrm{curl}^2 \mathfrak{A} = \mathrm{V}\nabla\mathrm{V}\nabla\mathfrak{A}.$$

Dieser Ausdruck ist als dreifaches Vektorprodukt aus ∇, ∇ und $\mathfrak{A}$ aufzufassen. Deshalb nimmt er den Wert an [siehe Gleichung (16)]:

$$\mathrm{curl}^2 \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2 \mathfrak{A}. \tag{35f}$$

Von Wichtigkeit ist auch die Gleichung:

$$\mathrm{curl}\,(\nabla A) = \mathrm{V}\nabla(\nabla A) = 0. \tag{35g}$$

Die Richtigkeit dieser Beziehung erhellt am besten, wenn man $\mathrm{curl}\,(\nabla A)$ durch seine Determinante darstellt.

Es ist nämlich:

$$\mathrm{curl}(\nabla A) = \begin{vmatrix} \mathfrak{i} & \mathfrak{j} & \mathfrak{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A}{\partial x} & \frac{\partial A}{\partial y} & \frac{\partial A}{\partial z} \end{vmatrix},$$

und wie man sofort erkennt, ist diese Determinante null.

§ 8.

Die Operation $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$ beansprucht besonderes Interesse. Der Ausdruck kann als dreifaches Produkt der Vektoren $\mathfrak{A}$, ∇ und $\mathfrak{B}$ aufgefaßt werden:

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = \left(A_1 \frac{\partial}{\partial x} + A_2 \frac{\partial}{\partial y} + A_3 \frac{\partial}{\partial z}\right)\mathfrak{B}. \tag{36}$$

Erinnert man sich der Formel (16):

$$(\mathfrak{C}\mathfrak{B})\mathfrak{A} - (\mathfrak{A}\mathfrak{C})\mathfrak{B} = \mathrm{V}\mathfrak{C}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B},$$

so läßt sich für $(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B}$ schreiben:

$$(\mathfrak{A}\nabla_{\mathfrak{B}})\mathfrak{B} = \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \mathrm{V}\,\mathrm{V}\nabla_{\mathfrak{B}}\mathfrak{B}\mathfrak{A} = \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}. \tag{37}$$

Ist $\mathfrak{A}$ ein Einheitsradius $\mathfrak{r}_1$, so kann $(\mathfrak{r}_1\nabla_{\mathfrak{B}})\mathfrak{B}$ als der Differentialkoeffizient von $\mathfrak{B}$ nach r aufgefaßt werden nach Analogie von Gleichung (30):

(38) $$(\mathfrak{r}_1 \nabla)\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{B}}{dr} = \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{r}_1 \mathfrak{B}) + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}_1,$$

(38a) $$d\mathfrak{B} = dr\,(\mathfrak{r}_1 \nabla)\mathfrak{B} = (d\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{B}$$

und durch Multiplikation von (38) mit r:

(39) $$(\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{B}}{dr}r = \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}.$$

Diese Gleichung gestattet es, einen Vektor als Funktion eines Radiusvektors nach der Mc. Laurinschen Reihe zu entwickeln. Bekanntlich ist, wenn $y = f(x)$,

$$y = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots$$

In dieser Gleichung bedeuten $f(0)$, $f'(0)$ usw. die Funktion y bezw. die Derivierten dieser Funktion, nachdem man in denselben $x = 0$ gesetzt hat.

Faßt man daher den Vektor $\mathfrak{B}$ als lineare Funktion von $\mathfrak{r}$ auf und versteht man unter $d\mathfrak{B}$ die Änderung, die $\mathfrak{B}$ erleidet, wenn man in der Richtung $\mathfrak{r}_1$ um die Strecke dr weitergeht, so ergibt sich:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \left(\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\right)_0 r.$$

Der Index 0 bedeutet, daß die Werte von $\mathfrak{B}$ und von $\frac{d\mathfrak{B}}{dr}$ in Frage kommen, welche in einem unendlich kleinen Bezirk um den Anfangspunkt des Radiusvektors herum bestehen.

Man erkennt nun, daß man gemäß Gleichung (39) setzen kann:

(40) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + (\mathfrak{r}\nabla)_0\mathfrak{B},$$

wenn man $\mathfrak{B}$ in dem unendlich kleinen Bezirke, welcher den Ursprung des Radiusvektors umgibt, angeben will. $\mathfrak{r}$ ist alsdann ein unendlich kleiner Radius.

Durch Einsetzen des Wertes von $(\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{B}$ aus Gleichung (39) folgt:

(41) $$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}.$$

Dieser Ausdruck läßt sich vereinfachen, indem für $\nabla(\mathfrak{r}\mathfrak{B})$ auch gesetzt werden kann:

$$\nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) = \nabla(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) - \nabla_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r}\mathfrak{B}).$$

Führt man die Operation $\nabla_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{r}\mathfrak{B})$ aus, so findet man dafür den Wert $\mathfrak{B}$. Daher:

$$\nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) = \nabla(\mathfrak{r}\mathfrak{B}) - \mathfrak{B}, \tag{42}$$

folglich:

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}_0 + \frac{1}{2}\nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{r}) + \frac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}. \tag{43}$$

Einfachere Beispiele aus der Mechanik.

I. Zur Statik starrer Körper.

Ein starrer Körper ist dadurch definiert, daß man die Angriffspunkte der auf ihn wirkenden Kräfte beliebig in den entsprechenden Kraftrichtungen verschieben kann, ohne das Gleichgewicht zu stören, bezw. den Bewegungszustand zu ändern.

Wir beweisen folgenden Satz:

Die Kräfte, welche in den Schwerpunkten der Flächen eines Polyeders normal zu diesen und nach innen gewandt mit Intensitäten angreifen, welche den Inhalten der betreffenden Flächen proportional sind, halten sich im Gleichgewicht.

Zunächst beweisen wir diesen Satz für ein reguläres Tetraeder.

Errichtet man in den Schwerpunkten der Flächen eines solchen die Normalen, so treffen sich diese Normalen bekanntlich in einem Punkte und gehen durch die Ecken des Tetraeders. Wenn man daher die Angriffspunkte der in den Schwerpunkten der Tetraederflächen angreifenden normalen Kräfte nach diesem Schnittpunkt verlegt und beachtet, daß die Kräfte der Größe und Richtung nach bis auf das Vorzeichen den als Vektoren aufgefaßten Flächen entsprechen, für welche die Gleichung gilt: $\sum\mathfrak{g} = 0$, so ist einleuchtend, daß diese Kräfte sich im Gleichgewicht halten müssen.

Hat man nun ein beliebiges Polyeder, so kann man dieses in eine unendlich große Anzahl von regulären Tetraedern lückenlos einteilen. Läßt man auf die Flächen der Tetraeder die normalen nach innen gerichteten gleichen Kräfte wirken, so daß dieselben im Schwerpunkte der Tetraederflächen angreifen, so wird jedes Tetraeder in Gleichgewicht sein und folglich auch das Polyeder. Erwägt man, daß auf zwei aneinander stoßende Tetraederflächen gleiche und entgegengesetzte Kräfte wirken, welche sich also aufheben, so bleiben als wirkende Kräfte nur diejenigen übrig, die an den Elementen der Polyederflächen selbst angreifen. Auf die Elemente der Polyederflächen wirken nun gleiche normale Kräfte. Diese können bei jeder Polyederfläche ersetzt werden durch eine einzelne im Schwerpunkt der Polyederfläche angreifende, normal nach innen gerichtete Kraft von der Größe des Inhalts der entsprechenden Fläche.

Hieraus folgt, daß ein Polyeder im Gleichgewicht sich befindet, wenn in den Schwerpunkten der Flächen zu letzteren proportionale, normale, nach innen gerichtete Kräfte angreifen.

II. Zur Theorie des Schwerpunktes.

Im folgenden betrachten wir den Gleichgewichtszustand eines starren, homogenen Körpers, auf welchen die als konstanter Vektor aufgefaßte Schwerkraft einwirkt. Der Schwerpunkt eines solchen Körpers fällt mit dem Massenmittelpunkt zusammen. Daher genügt er der Bedingung, daß sein Abstand von einer beliebigen Ebene gleich dem mittleren Abstande seiner sämtlichen Punkte von dieser Ebene ist.

Um die Bedingungen, welche an den Schwerpunkt zu knüpfen sind, analytisch zu formulieren, ist es nützlich, vorher auf den Begriff eines Kraftmoments einzugehen.

Unter dem Kraftmoment $\mathfrak{M}$ einer im Punkt P angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ in Bezug auf den Punkt 0 versteht man den Ausdruck:

$$V \mathfrak{r} \mathfrak{F},$$

wo $\mathfrak{r}$ von 0 nach P zu ziehen ist. Das Kraftmoment strebt den Körper um eine durch 0 gehende, senkrecht zu $\mathfrak{r}$ und

$\mathfrak{F}$ stehende Achse zu drehen. Damit also ein Körper weder eine Drehwirkung und noch eine translatorisch wirkende Kraftwirkung erfahre, muß die geometrische Summe aller Kraftmomente und die Summe aller Kräfte null sein.

Das heißt:

$$\sum \mathfrak{F} = 0,$$

$$\sum \mathrm{V}\mathfrak{r}\mathfrak{F} = 0.$$

Der Schwerpunkt eines Körpers ist nun dadurch ausgezeichnet, daß für jede beliebige Orientierung des Körpers gegen die Kraftrichtung die Summe aller Kraftmomente bezogen auf den Schwerpunkt null ist. Ist die Dichte des homogenen Körpers ϱ und bezeichnen wir die Schwerkraft mit $\mathfrak{G}$ und ein Volumelement mit dv, so wirkt auf den Körper eine Kraft:

$$\mathfrak{F} = \int \mathfrak{G} \varrho \, dv.$$

Es ist daher die Summe $\mathfrak{M}$ aller Kraftmomente:

$$\mathfrak{M} = \varrho \int \mathrm{V}\mathfrak{r}\mathfrak{G} \, dv.$$

$\mathfrak{G}$ ist von einem Potential ableitbar:

$$\mathfrak{G} = \nabla \varphi;$$

daher:

$$\mathfrak{M} = \varrho \int \mathrm{V}\mathfrak{r}\nabla\varphi \, dv.$$

Nun ist nach Gleichung (35a):

$$\mathrm{V}\mathfrak{r}\nabla\varphi = \varphi \operatorname{curl} \mathfrak{r} - \operatorname{curl}(\varphi\mathfrak{r});$$

da aber:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{r} = 0,$$

so folgt:

$$\varrho \int \mathrm{V}\mathfrak{r}\nabla\varphi \, dv = -\varrho \int \operatorname{curl}(\varphi\mathfrak{r}) \, dv.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung läßt sich noch umformen, indem:

$$-\varrho \int \operatorname{curl}(\varphi\mathfrak{r}) \, dv = \varrho \int \mathrm{V}(\varphi\mathfrak{r}) \, d\mathfrak{g};$$

daher:

$$\mathfrak{M} = \varrho \int \mathrm{V}(\varphi\mathfrak{r}) \, d\mathfrak{g}.$$

Es läßt sich also das Gesamtmoment der auf einen homogenen Körper wirkenden Kräfte bezogen auf

einen beliebigen Punkt durch ein vektorielles Oberflächenintegral angeben, wenn das Potential der Kraft an jedem Punkte der Oberfläche desselben bekannt ist.

Für den Schwerpunkt gilt:

$$\int V(\varphi\mathfrak{r})\,d\mathfrak{g} = 0$$

oder:

$$\int V\mathfrak{r}\mathfrak{G}\,dv = 0.$$

Diese Bedingung muß für jede beliebige Lage des Körpers erfüllt sein, oder, was dasselbe bedeutet, bei einer bestimmten Lage des Körpers muß die Gleichung für eine beliebig gerichtete konstante Kraft erfüllt sein. Das ist aber nur möglich, wenn:

$$\int \mathfrak{r}\,dv = 0.$$

Dieser Bedingung muß der Schwerpunkt eines jeden homogenen Körpers genügen.

III. Die Bewegung eines starren Körpers.

Der allgemeine Fall der Bewegung (Schraubung) eines starren Körpers tritt ein, wenn der Körper außer einer translatorischen Bewegung eine Drehung ausführt. Man erhält die Geschwindigkeit eines beliebigen Punktes des Körpers, wenn man zur translatorischen Geschwindigkeit die rotatorische addiert. Wir wollen nun den Ausdruck für die letztere ableiten.

In der Figur bezeichne der große Pfeil die Lage der Drehachse. Auf dieser wählen wir einen beliebigen Punkt 0, von dem aus wir den Radiusvektor nach dem Punkte P des starren Körpers ziehen, dessen Geschwindigkeit wir finden wollen. Bezeichnen wir dann den Tensor der Winkelgeschwindigkeit mit w und den Winkel, den $\mathfrak{r}$ mit der Achse bildet, mit α, so erkennt man sofort, daß der Tensor v der Geschwindigkeit von P ist:

$$v = rw \sin \alpha.$$

Die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ ist dadurch bestimmt, daß die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{r}$, $\mathfrak{v}$ und der der Drehung entsprechenden Achsenrichtung einem Rechtssystem entspricht. Fassen wir daher die Winkelgeschwindigkeit als einen Vektor auf, dessen Richtung in jene Achsenrichtung fällt, so erkennt man, daß:

$$\mathfrak{v} = V\mathfrak{w}\mathfrak{r}.$$

Führt der Körper außerdem eine translatorische Bewegung mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}_0$ aus, so ist die Bewegung eines Punktes eines starren Körpers in einem gegebenen Zeitpunkt:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + V\mathfrak{w}\mathfrak{r}.$$

Fig. 9.

$\mathfrak{w}$ ist für alle Punkte des Körpers konstant. Wie nun früher gezeigt wurde [siehe Gleichung (35)], ist:

$$2\mathfrak{w} = \text{curl}\ \mathfrak{v};$$

daher ist auch:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2}V\text{curl}\ \mathfrak{v}\mathfrak{r}.$$

IV. Zur Kinematik eines Punktes. Das erste Keplersche Gesetz.

Das erste Keplersche Gesetz sagt bekanntlich aus, daß der von der Sonne nach einem Planeten gezogene Radiusvektor in gleichen Zeiten gleiche Flächen beschreibt.

Dieser Satz gilt allgemein für die Bewegung einer Masse, auf welche eine Zentralkraft wirkt.

Bewegt sich der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ in der Zeit dt um die Strecke $d\mathfrak{r}$ weiter, so ist die beschriebene Fläche $d\mathfrak{g}$:

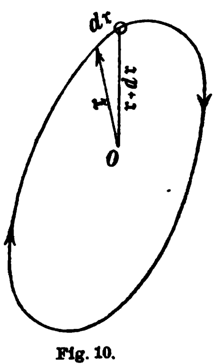


Fig. 10.

$$d\mathfrak{g} = \frac{1}{2}V\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r};$$

daher:

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \frac{1}{2} V \mathfrak{r} \frac{d\mathfrak{r}}{dt};$$

folglich:

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \frac{1}{2} V \frac{d\mathfrak{r}}{dt}\frac{d\mathfrak{r}}{dt} + \frac{1}{2} V \mathfrak{r} \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}.$$

Die rechte Seite der Gleichung ist offenbar null, denn zunächst ist das erste Glied als Vektorprodukt zweier gleicher Vektoren null. Das zweite Glied besteht aus Faktoren, welche entgegengesetzte Richtung haben. Denn $\frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}$ repräsentiert die Beschleunigung der Kraft und ist im Falle, daß die Gravitationskraft wirksam ist, nach dem Zentrum gerichtet, während $\mathfrak{r}$ vom Zentrum nach der Masse gezogen ist. Da nun:

$$\sin\left(\mathfrak{r}_1 \frac{d^2\mathfrak{r}}{dt^2}\right) = 0,$$

so folgt:

$$\frac{d}{dt}\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \mathfrak{a}.$$

Dies ist das erste Keplersche Gesetz.

V. Die Bewegung eines Punktes auf einer Kurve.

Ein Punkt bewege sich auf einer beliebigen Kurve. Zur Zeit t befinde er sich in P_1. Im folgenden Zeitelement lege er die Strecke ds zurück und gelange so nach P_2. Zieht man von einem festen Punkte 0 aus einen Radiusvektor nach dem Punkte, so fällt die Richtung der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ in jedem Zeitpunkte mit der Richtung des Zuwachses von $\mathfrak{r}$ zusammen.

Daher findet man:

$$\mathfrak{v} = \frac{d\mathfrak{r}}{dt}.$$

Die Richtung von $\mathfrak{v}$ ist aber tangential zur Kurve. Bezeichnet man daher einen Einheitsvektor in der Richtung von $\mathfrak{v}$ mit $\mathfrak{c}_1$, so erhält man:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{c}_1 \frac{ds}{dt}.$$

$\frac{ds}{dt}$ ist hier also der Tensor der Geschwindigkeit.

Für die Beschleunigung findet man:

$$\mathfrak{G} = \frac{d\mathfrak{c}_1}{dt}\frac{ds}{dt} + \mathfrak{c}_1\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d\mathfrak{c}_1}{ds}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{c}_1\frac{d^2s}{dt^2}.$$

$\frac{d\mathfrak{c}_1}{ds}$ läßt sich nun mit dem Krümmungsradius der Kurve im Punkte P_1 in Beziehung bringen. Zieht man von den Punkten P_1 und P_2 die Einheitsvektoren $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_1 + d\mathfrak{c}_1$ in der Richtung von $\mathfrak{v}$ und verbindet die Endpunkte, so entsteht ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Winkel an der Basis als rechte Winkel aufgefaßt werden dürfen, weil der Winkel an der Spitze unendlich klein ist. Die Basis ist nun gleich $d\mathfrak{c}_1$.

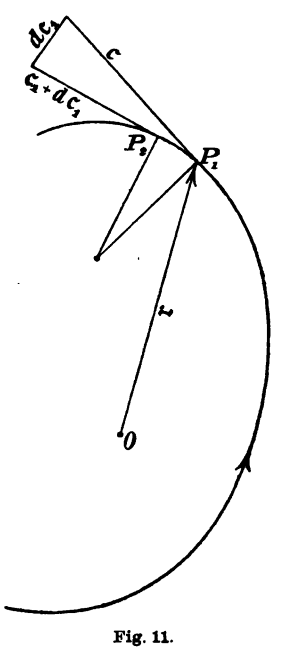


Fig. 11.

Ferner errichten wir in P_1 und P_2 nach der konkaven Seite zu Senkrechte auf $\mathfrak{c}_1$ und $\mathfrak{c}_1 + d\mathfrak{c}_1$. Diese schneiden sich im Krümmungsmittelpunkte. Das so entstandene Dreieck ist dem Dreieck, gebildet aus $\mathfrak{c}_1$, $\mathfrak{c}_1 + d\mathfrak{c}_1$ und $d\mathfrak{c}_1$, ähnlich nach Konstruktion. Daher verhält sich der Tensor von $d\mathfrak{c}_1 : ds$ wie $1 : R$, wenn mit R der Krümmungsradius bezeichnet wird.

Denkt man sich den Krümmungsradius R vom Krümmungsmittelpunkt aus nach der Kurve gezogen, so ist offenbar die Richtung dieses Radiusvektors entgegengesetzt derjenigen von $d\mathfrak{c}_1$. Deshalb kann gesetzt werden:

$$\frac{d\mathfrak{c}_1}{ds} = -\frac{\mathfrak{R}_1}{R},$$

wo R_1 einen Einheitsradiusvektor in der Richtung von R bedeutet. Daher findet man für die Beschleunigung:

$$\mathfrak{G} = -\frac{\mathfrak{R}_1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{c}_1\frac{d^2s}{dt^2}.$$

§ 8a.

Vektoranalytische Transformationen.

An den Physiker tritt häufig die Aufgabe heran, variable Vektoren, welche als Funktionen gewisser unabhängiger Veränderlichen auftreten, als Funktionen von anderen Veränderlichen auszudrücken. Die Vektoranalyse gestattet nun derartige Transformationen in eleganter Weise zu bewerkstelligen. Wir haben bereits in dem Satze vom Oberflächenintegral eine derartige Transformation kennen gelernt.

Wenden wir uns zunächst der Ableitung des Stokesschen Theorems zu.

Ein Vektor $\mathfrak{B}$ sei im Raume kontinuierlich verteilt. Wie bereits früher gezeigt wurde, läßt sich dann $\mathfrak{B}$ als Funktion eines Radiusvektors darstellen, dessen Ursprung in einem beliebig gewählten Punkt festgelegt ist. Läßt man den Endpunkt dieses Radiusvektors eine Raumkurve tracieren, so bezeichnet man den Ausdruck:

$$\int_{P_0}^{P_1} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{r}$$

als das Linienintegral des Vektors $\mathfrak{B}$ über die Kurve. Das Integral ist zwischen den Punkten P_0 und P_1 zu nehmen. Ist die Kurve eine geschlossene, und soll das Integral über die geschlossene Kurve genommen werden, so drückt man ein solches Integral durch das Symbol:

$$\int_{P_0}^{P_0} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{r} \quad \text{oder durch} \quad \int_{0} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{r}$$

aus. Durch das Stokessche Theorem wird nun ein Linienintegral über eine geschlossene Kurve durch ein Flächenintegral über eine beliebige von der Kurve begrenzte Fläche ausgedrückt.

Bevor wir den eigentlichen Stokesschen Satz beweisen, soll ein verwandtes Theorem abgeleitet werden.

Man denke sich die abgebildete Kurve durch den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ traciert. $d\mathfrak{r}$ ist dann als Streckenelement der Kurve aufzufassen. $\mathfrak{B}$ sei eine l i n e a r e Funktion von .

Nach Gleichung (39) ist:

$$(\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{B} = r\frac{d\mathfrak{B}}{dr} = \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{B}) + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r},$$

wofür auch infolge von (42) gesetzt werden kann:

$$r\frac{d\mathfrak{B}}{dr} = \nabla(\mathfrak{r}\,\mathfrak{B}) - \mathfrak{B} + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}. \tag{44}$$

Hier ist wohl zu beachten, daß die Werte von $\mathfrak{B}$, $\frac{d\mathfrak{B}}{dr}$ und $\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}$ sich auf den Endpunkt von $\mathfrak{r}$ beziehen.

Multipliziert man beide Seiten der Gleichung mit $d\mathfrak{r}$ und integriert über eine geschlossene Kurve, so ergibt sich:

$$\int_0 r\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\,d\mathfrak{r} = \int_0 d\mathfrak{r}\,\nabla(\mathfrak{r}\,\mathfrak{B}) - \int_0 \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} + \int_0 d\mathfrak{r}\,\mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}. \tag{45}$$

Nun ist die linke Seite der Gleichung durch partielle Integration:

$$\int_0 r\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\,d\mathfrak{r} = \int_0 d\left(\mathfrak{r}\,r\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\right) - \int_0 \mathfrak{r}\,d\left(r\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\right). \tag{46}$$

Der erste Term der rechten Seite verschwindet aber, denn unter dem Integralzeichen steht ein vollständiges Differential, und bei der Integration zwischen zwei identischen Grenzwerten nimmt es den Wert null an.

Der zweite Term der rechten Seite nimmt den Wert an:

$$\int_0 \mathfrak{r}\,d\left(r\frac{d\mathfrak{B}}{dr}\right) = \int_0 \mathfrak{r}\left(d\mathfrak{B} + r\frac{d^2\mathfrak{B}}{dr}\right). \tag{47}$$

Da aber $\mathfrak{B}$ eine lineare Funktion von $\mathfrak{r}$, so ist:

$$\frac{d^2\mathfrak{B}}{dr} = 0.$$

Die Gleichung (45) nimmt daher die Form an:

$$-\int_0 \mathfrak{r}\,d\mathfrak{B} = \int_0 d\mathfrak{r}\,\nabla(\mathfrak{r}\,\mathfrak{B}) - \int_0 \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} + \int_0 d\mathfrak{r}\,\mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}. \tag{48}$$

In dieser Gleichung ist nun:

$$\int_{\mathfrak{s}} d\mathfrak{r} \nabla (\mathfrak{r}\mathfrak{B}) = 0,$$

weil der Ausdruck unter dem Integralzeichen ein vollständiges Differential ist [siehe Gleichung (30)]. Beachtet man ferner, daß $\int_{\mathfrak{s}} d(\mathfrak{B}\mathfrak{r})$ aus demselben Grunde verschwindet, und daß daher:

$$\int_{\mathfrak{s}} \mathfrak{r}\, d\mathfrak{B} = -\int \mathfrak{B}\, d\mathfrak{r}, \tag{49}$$

so folgt:

$$2\int_{\mathfrak{s}} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{r} = \int_{\mathfrak{s}} d\mathfrak{r}\, V \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, \mathfrak{r}. \tag{50}$$

Durch cyklische Vertauschung kann die rechte Seite auch geschrieben werden nach (11):

$$\int_{\mathfrak{s}} d\mathfrak{r}\, V \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, \mathfrak{r} = \int \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, V \mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}.$$

$V\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}$ ist nun die doppelte Vektorfläche des Dreiecks, welches $\mathfrak{r}$ und $d\mathfrak{r}$ zu Seiten hat. Bezeichnet man daher eines dieser Flächenelemente mit $d\mathfrak{g}$, so ist:

$$\int_{\mathfrak{s}} \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, V \mathfrak{r}\, d\mathfrak{r} = 2\int \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{g}.$$

Damit geht Gleichung (50) über in:

$$\int_{\mathfrak{s}} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{r} = \int \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{g}. \tag{51}$$

Diese Gleichung stellt einen Spezialfall des Satzes von Stokes dar.

Wie bereits bei der Ableitung von Gleichung (44) erwähnt wurde, bezieht sich den Voraussetzungen der Ableitung gemäß $\operatorname{curl} \mathfrak{B}$ auf Punkte der Randkurve. Bei der Bildung des Integrals

$$\int \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{g}$$

sind daher die Elemente der Kegelfläche $d\mathfrak{g}$ mit denjenigen Werten von $\operatorname{curl} \mathfrak{B}$ zu multiplizieren, welche auf den zu $d\mathfrak{g}$ gehörigen Streckenelementen $d\mathfrak{r}$ bestehen. Beachtet man aber

ferner, daß gemäß der Ableitung der Ursprung des Radiusvektors beliebig gewählt war, daß also die Integration über beliebige Kegelflächen erstreckt werden kann, sofern diese nur durch dieselbe Randkurve begrenzt werden, so erkennt man, daß das Integral nur dann einen eindeutigen Wert liefern kann, wenn curl $\mathfrak{V}$ auf der Kurve einen konstanten Wert besitzt. Die Kurve war aber in dem betrachteten Felde beliebig gezogen. Daher gelangen wir zu der wichtigen Schlußfolgerung: *In einem linearen Vektorfelde hat der curl des Vektors einen konstanten Wert.*

Für ein lineares Feld gilt daher:

$$\int \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r} = \operatorname{curl} \mathfrak{V} \int d\mathfrak{g}. \tag{51a}$$

Wir wenden uns nunmehr dem allgemeineren Falle zu, daß $\mathfrak{V}$ eine beliebige stetige Funktion des Ortes sei.

Unterwirft man zunächst in dem Felde des Vektors einen unendlich kleinen Bezirk der Betrachtung und zieht in diesem eine in sich zurücklaufende Kurve, so darf man in diesem Bezirke $\mathfrak{V}$ als lineare Funktion des Ortes auffassen und auch den curl des Vektors als konstant betrachten. Dann wird in diesem Bezirk die abgeleitete Beziehung:

$$\int\limits_{\circ} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r} = \operatorname{curl} \mathfrak{V} \int d\mathfrak{g}$$

anwendbar sein. Wir gehen nunmehr zur Betrachtung eines endlichen Bezirks über. In dem Felde des Vektors $\mathfrak{V}$ sei eine beliebige geschlossene Kurve gezogen, welche als Randkurve eine beliebige Fläche begrenze. Wir denken uns diese Fläche durch zwei Scharen von Linien in eine unendlich große Anzahl von Parallelogrammen geteilt und fassen dann diese Flächenelemente als in demselben Sinne traciert auf. Es gilt für jedes Flächenelement:

$$\int\limits_{\circ} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r} = \operatorname{curl} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{g},$$

wo $d\mathfrak{g}$ nunmehr die Fläche des Parallelogramms repräsentiert und nicht mehr ein Element einer unendlich kleinen Fläche, wie in der vorhergehenden Gleichung. Summiert man alsdann alle

Werte von curl $\mathfrak{V}\, d\mathfrak{g}$, welche von sämtlichen unendlich kleinen Parallelogrammen geliefert werden, so kann diese Summierung dargestellt werden durch: $\int \operatorname{curl} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{g}$.

Dieser Ausdruck muß nun gleich sein der Summe aller Linienintegrale über die Randkurven der unendlich kleinen Parallelogramme. Ziehen wir alle Ausdrücke:

$$\mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}$$

zusammen, wo $d\mathfrak{r}$ die Seite eines unendlich kleinen Parallelogramms bedeutet, so finden wir, daß bis auf die von der

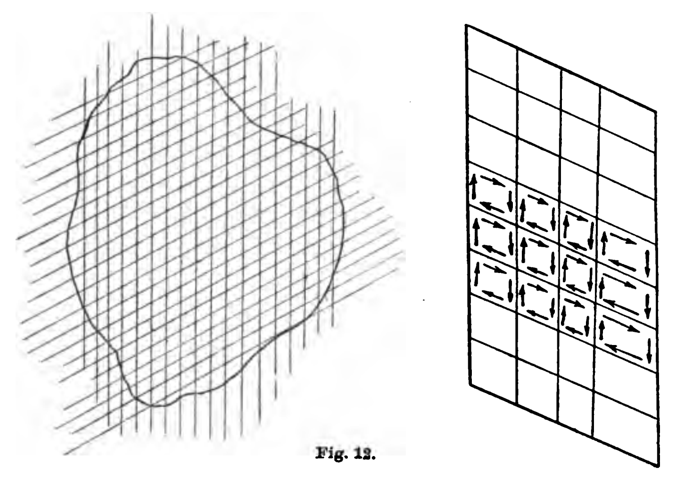


Fig. 12.

Randkurve herrührenden Glieder jedes $\mathfrak{V}\, d\mathfrak{r}$ zweimal vorkommt und zwar das eine Mal mit positivem, das andere Mal mit negativem Vorzeichen.

Die beistehenden Figuren werden die Erkenntnis dieser Tatsache erleichtern. Verstehen wir daher nunmehr unter $d\mathfrak{r}$ ein Element der endlichen Randkurve, so kann die Summe der Linienintegrale von $\mathfrak{V}$ über die Begrenzung der kleinen Parallelogramme ausgedrückt werden durch:

$$\int_{\delta} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r},$$

und es ist:

(51b)
$$\int_{\delta} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{r} = \int \operatorname{curl} \mathfrak{V}\, d\mathfrak{g}.$$

Der Beweis des Stokesschen Satzes kann in einfacher Weise geführt werden unter Benutzung von Gleichung (43):

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}_0 + \frac{1}{2}\nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{r}) + \frac{1}{2}V\operatorname{curl}\mathfrak{B}\mathfrak{r}.$$

Der Wert von $\mathfrak{B}$ in dieser Gleichung bezieht sich auf einen sehr kleinen Bezirk, welcher den Anfangspunkt des unendlich kleinen Radiusvektors $\mathfrak{r}$ einschließt.

Multipliziert man die Gleichung mit $d\mathfrak{r}$ und integriert dann über die geschlossene Kurve, welche in dem betreffenden kleinen Bezirk verläuft, so erhält man:

$$\int\limits_0 \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} = \frac{1}{2}\int\limits_0 (\mathfrak{B}_0 + \nabla(\mathfrak{B}\mathfrak{r}) + V\operatorname{curl}\mathfrak{B}\mathfrak{r})\,d\mathfrak{r}. \tag{52}$$

Nun ist offenbar:

$$\int\limits_0 \mathfrak{B}_0\,d\mathfrak{r} = \int\limits_0 d(\mathfrak{B}_0\mathfrak{r}) - \int\limits_0 \mathfrak{r}\,d\mathfrak{B}_0 = 0,$$

weil $\mathfrak{B}_0$ eine Konstante und $d(\mathfrak{B}_0\mathfrak{r})$ ein vollständiges Differential ist. Wendet man zur weiteren Untersuchung der in (52) vorkommenden Integrale analoge Überlegungen an wie bei (48) und (50), so findet man für das Linienintegral der Randkurve des Flächenelementes:

$$\int\limits_0 \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} = \int \operatorname{curl}\mathfrak{B}\,d\mathfrak{g}.$$

Um ferner zu endlichen Dimensionen überzugehen, verfährt man genau in derselben Weise wie bei der vorhergehenden Ableitung.

§ 9.
Das Potential.

An den Stokesschen Satz lassen sich wichtige theoretische Betrachtungen anschließen.

Aus der Ableitung geht zunächst hervor, daß die Fläche, welche von der Kurve begrenzt wird, beliebig gestaltet sein kann. Denkt man sich nun eine geschlossene Fläche, durch eine in sich zurücklaufende Linie, in zwei Hälften geteilt, so kann diese Linie als Randkurve zu beiden Flächenteilen aufgefaßt werden. Dann gilt sie aber für die eine Hälfte als im entgegengesetzten Sinne traciert wie für die andere, da wir ja

den Umlaufssinn einer geschlossenen Kurve immer so wählen, daß die von derselben begrenzte Fläche — als Teil einer geschlossenen Fläche aufgefaßt — stets einen nach außen weisenden Vektor zugeordnet erhält. Dem Vektorfluß des curl $\mathfrak{B}$ durch die eine Hälfte entspricht daher ein gleicher Vektorfluß mit entgegengesetztem Vorzeichen durch die andere Hälfte; d. h., der Vektorfluß des curl $\mathfrak{B}$ durch die geschlossene Fläche ist null:

$$\int_0 \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{g} = 0. \tag{52}$$

Der Index am Integralzeichen bedeutet hier, daß die Integration über die geschlossene Fläche auszuführen ist.

Daß der Vektorfluß eines curls eines Vektors null ist, konnte auch bereits aus dem Gaußschen Satze gefolgert werden. Es ist nämlich Gleichung (27):

$$\int_0 \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{g} = \int \operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{B}\, dv.$$

Aber nach Gleichung (33a):

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathfrak{B} = 0.$$

Gleichung (52) besagt, daß der Fluß eines Vektors durch eine geschlossene Fläche verschwindet, wenn dieser Vektor als curl eines anderen Vektors darstellbar ist.

Aus dem Stokesschen Satze können wir ferner die wichtige Schlußfolgerung ziehen, daß das Linienintegral über eine geschlossene Kurve null ist, wenn der curl des betreffenden Vektors null ist.

Das führt uns zu einer Betrachtung der Arbeitsleistung von zwei verschiedenen Klassen von Kräften. Ganz allgemein ist die elementare Arbeit, welche eine Kraft leistet, wenn ihr Angriffspunkt eine unendlich kleine Wegstrecke zurücklegt, gleich dem Produkt aus Kraft und Wegstrecke, multipliziert mit dem Kosinus des von den Richtungen beider eingeschlossenen Winkels.

Legt daher der Angriffspunkt der Kraft $\mathfrak{B}$ auf einer bestimmten Kurve den Weg von P_1 nach P_2 zurück, so ist die Arbeit:

$$\int_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}\, d\mathfrak{r}.$$

Wir können nun die Frage stellen, ob und in welcher Weise dieses Integral von der Gestalt der Kurve abhängig ist.

Ist eine Abhängigkeit vorhanden, so zeigt eine einfache Überlegung, daß dann der Wert des Linienintegrals über eine geschlossene Kurve einen positiven oder negativen Wert hat, d. h. nicht null sein kann. Denn nehmen wir an, es ständen zwei Wege von P_1 nach P_2 zur Verfügung, von welchen der eine über den Punkt D und der andere über N führt, so können wir den Angriffspunkt der Kraft eine geschlossene Kurve beschreiben lassen, indem wir ihn von P_1 nach D und von da nach P_2 gehen lassen. Von P_2 gehe er nach N und kehre von da nach P_1 zurück.

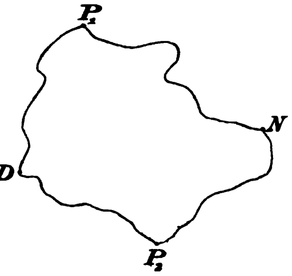


Fig. 13.

Der Punkt hat eine geschlossene Kurve beschrieben. Da hierbei die Kraft, indem sich ihr Angriffspunkt von P_1 über D nach P_2 bewegt, eine andere Arbeit leistet als auf dem Wege von P_2 über N nach P_1, so ist:

$$\int\limits_0 \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} = \int\limits_{P_1}^{P_2} \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} + \int\limits_{P_2}^{P_1} \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} \gtrless 0,$$

oder bei expliziter Angabe des Weges:

$$\int\limits_0 \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} = \int\limits_{P_1}^{D} \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} + \int\limits_{D}^{P_2} \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} + \int\limits_{P_2}^{N} \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} + \int\limits_{N}^{P_1} \mathfrak{B}\,d\mathfrak{r} \gtrless 0.$$

An Stelle der Kraft $\mathfrak{B}$ kann offenbar ein beliebiger im Raume verteilter Vektor treten, und wir dürfen auf Grund des Satzes von Stokes schließen, daß das Linienintegral eines Vektors, genommen zwischen zwei Punkten des Raumes, von der Gestalt der Kurve abhängig ist, wenn der curl dieses Vektors einen von null verschiedenen Wert hat.

Die Tatsache, daß das Integral von $\mathfrak{B}\,d\mathfrak{r}$, genommen zwischen zwei identischen Werten, nicht null ist, wird mathe-

matisch dadurch ausgedrückt, daß man sagt, der Skalar $\mathfrak{B} d\mathfrak{r}$ ist kein vollkommenes Differential.

Wie wie früher gesehen haben, läßt sich das vollständige Differential eines im Raume stetig verteilten Skalars V ausdrücken durch [siehe Gleichung (30a)]:

$$dV = (\nabla V) d\mathfrak{r}.$$

Setzen wir daher:

$$\mathfrak{B} = \nabla V,$$

oder auch, wie dies z. B. für eine abstoßende Kraft zutrifft, welche in der Richtung des abnehmenden Potentials wirkt:

$$\mathfrak{B} = -\nabla V,$$

so verschwindet das Linienintegral von $\mathfrak{B}$ über eine geschlossene Kurve:

$$\int_0 (\nabla V) d\mathfrak{r} = 0. \tag{53}$$

V wird das Potential von $\mathfrak{B}$ genannt. Kräfte, welche von einem Potential ableitbar sind, werden als konservative Kräfte bezeichnet. Daß der curl von ∇V null ist, war auch bereits durch Gleichung (35g) ausgesprochen. Ferner sei nochmals darauf hingewiesen, daß die Kraft $\mathfrak{B}$ senkrecht steht auf den Flächen, auf welchen V einen konstanten Wert hat. Vergl. die an Gleichung (30) anknüpfenden Bemerkungen.

Zu den bekanntesten konservativen Kräften gehören die Schwerkraft und die in einem elektrostatischen Felde wirkende Kraft.

Betrachten wir das Feld eines Elektrons oder allgemeiner einer Ladung, welche in einem sehr kleinen Volumen konzentriert gedacht werden kann. Die Erfahrung lehrt, daß die Kraft, welche von einer solchen Ladung herrührt, ausgedrückt wird durch:

$$\mathfrak{E} = \frac{q\mathfrak{r}_1}{r^2}, \tag{54}$$

wenn q die freie Elektrizitätsmenge bedeutet. Denkt man sich eine Kugelfläche um die Ladung als Mittelpunkt konstruiert,

so ist der Vektorfluß, welcher die Oberfläche dieser Kugel durchsetzt:

(55) $$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{g} = \int \frac{q\,\mathfrak{r}_1}{r^2}\, d\mathfrak{g}.$$

Nun sind $\mathfrak{r}_1$ und $d\mathfrak{g}$ gleichgerichtet. An Stelle von

$$\mathfrak{r}_1 d\mathfrak{g}$$

kann daher der Tensor eines Elementes der Kugelfläche treten. Erwägt man ferner, daß zu jedem dg derselbe Wert von $\frac{1}{r^2}$ gehört, so erkennt man, daß die Integration des Ausdrucks liefert:

(56) $$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{g} = \frac{q}{r^2} \cdot 4\pi r^2 = 4\pi q.$$

Wie schon bei Besprechung des Gaußschen Satzes bemerkt wurde, kann an Stelle der Kugelfläche eine beliebige Fläche treten, welche q umgibt.

Man erkennt hieraus, daß der Vektorfluß konservativer Kräfte in isotropen Medien durch das 4π-fache der von der Fläche eingeschlossenen Masse ausgedrückt werden kann.

Schließt die Fläche mehrere Ladungen q_1, q_2, q_3 etc. ein, so sind die von diesen herrührenden Vektorflüsse zu addieren, indem ja die Gesamtkraft durch geometrische Addition der Einzelkräfte erhalten wird:

(57) $$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{g} = \int (\mathfrak{E}_1 + \mathfrak{E}_2 + \mathfrak{E}_3 \cdots + \mathfrak{E}_n)\, d\mathfrak{g}.$$

Nach dem Gaußschen Satze kann an Stelle des Oberflächenintegrals ein Raumintegral treten:

$$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{g} = \int \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv,$$

daher

(58) $$\int \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv = 4\pi q.$$

Machen wir ferner die Annahme, daß in dem betreffenden Raume die freie Elektrizität eine kontinuierliche räumliche Verteilung habe, und daß ihre Dichte ϱ sei, so ist:

(59) $$q = \int \varrho\, dv.$$

Und es gilt die Gleichung:

$$\int \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv = \int 4\pi\varrho\, dv. \tag{60}$$

Besteht daher in einem Punkte des Raumes die Dichte der freien Elektrizität ϱ, so ist:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi\varrho. \tag{61}$$

$\mathfrak{E}$ ist nun von einem Potential ableitbar:

$$\mathfrak{E} = -\nabla V,$$

daher

$$-\nabla^2 V = 4\pi\varrho \tag{62}$$

und für Raumteile, welche frei von Ladungen sind:

$$\nabla^2 V = 0. \tag{63}$$

Dies ist die Laplacesche Gleichung.

Der Inhalt dieser Gleichung wird auch oft in der Weise ausgedrückt, daß man sagt, die elektrostatische Kraft erfülle in isotropen Medien die solenoidale Bedingung. Der Vektorfluß findet nämlich in ununterbrochenen, unverzweigten Linien statt.

Aus der Gleichung für eine konservative Kraft läßt sich das zu der Kraft gehörige Potential in folgender Weise ableiten. Man multipliziert die Gleichung:

$$\mathfrak{E} = -\nabla V = \int \mathfrak{r}_1 \frac{\varrho\, dv}{r^2} \tag{64}$$

mit $d\mathfrak{r}$, wo $d\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_1 dr$ ist und erhält:

$$-(\nabla V)\, d\mathfrak{r} = \int d\mathfrak{r} \frac{\mathfrak{r}_1}{r^2} \varrho\, dv,$$

$$-dV = \int \frac{dr}{r^2} \varrho\, dv,$$

$$V = \int \frac{\varrho\, dv}{r} = \int -\frac{\nabla^2 V}{4\pi r} dv = \int \frac{\operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv}{4\pi r}. \tag{65}$$

Außer dem skalaren Potential kennt die theoretische Physik ein vektorielles Potential, welches definiert ist durch:

$$\mathfrak{B} = \int \frac{\mathfrak{a}\, dv}{r}.$$

Zur Bildung dieses Integrals sind von einem festen Punkte aus die Radienvektoren nach allen Volumelementen zu ziehen, wo $\mathfrak{a}$ besteht; für diese Elemente sind alsdann die Ausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{a}\,dv}{r}$$

zu bilden. Die geometrische Summierung dieser Ausdrücke liefert den Wert von $\mathfrak{V}$ für den betreffenden festen Punkt.

Von Wichtigkeit ist die Divergenz und der curl eines Vektorpotentials:

$$\text{(66)} \qquad \operatorname{div}\mathfrak{V} = \int \nabla\left(\frac{\mathfrak{a}}{r}\right) dv = \int \frac{1}{r}\nabla\mathfrak{a}\,dv - \int \frac{\mathfrak{r}_1\mathfrak{a}}{r^2}\,dv,$$

$$\operatorname{curl}\mathfrak{V} = \int V\nabla\left(\frac{\mathfrak{a}}{r}\right) dv,$$

und da

$$V\nabla\left(\frac{\mathfrak{a}}{r}\right) = \frac{1}{r}V\nabla\mathfrak{a} + V\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\mathfrak{a},$$

so folgt:

$$\text{(67)} \qquad \operatorname{curl}\mathfrak{V} = \int \frac{1}{r}\operatorname{curl}\mathfrak{a}\,dv + \int V\frac{\mathfrak{a}\,\mathfrak{r}_1}{r^2}\,dv.$$

Aus der Analogie der Gleichungen:

$$V = \int \frac{\varrho\,dv}{r},$$

wo

$$\varrho = -\frac{\nabla^2 V}{4\pi} \quad \text{und} \quad \mathfrak{V} = \int \frac{\mathfrak{a}\,dv}{r},$$

dürfen wir sofort schließen, daß die Gleichung für $\mathfrak{V}$ sich auch schreiben läßt:

$$\text{(68)} \qquad \mathfrak{V} = -\int \frac{\nabla^2\mathfrak{V}}{4\pi r}\,dv.$$

In engem Zusammenhange mit der Lösung für $\nabla^2\mathfrak{V}$ steht die Lösung der Differentialgleichung:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{V} = \mathfrak{m}.$$

Man schreibt zunächst unter Einführung der Hilfsgröße $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{V} = \operatorname{curl}\mathfrak{A}.$$

Dann ist:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{V} = \operatorname{curl}^2\mathfrak{A} = -\nabla^2\mathfrak{A},$$

indem wir

$$\nabla\operatorname{div}\mathfrak{A} = 0$$

gesetzt haben.

Die Lösung für $\nabla^2\mathfrak{A}$ ist aber gemäß Gleichung (68):

$$\mathfrak{A} = -\int \frac{\nabla^2\mathfrak{A}}{4\pi r} dv,$$

wofür wir auch setzen dürfen:

$$\mathfrak{A} = \int \frac{\mathfrak{m}}{4\pi r} dv. \tag{69}$$

Hiermit ist die Aufgabe gelöst, denn um $\mathfrak{B}$ zu finden, brauchen wir nur den curl dieser Gleichung zu nehmen. Von besonderem Interesse ist die Lösung für den Fall, daß nur ein einziger Wirbelfaden im Felde vorhanden ist. In der Elektrodynamik entspricht dies dem Falle, wo ein elektrischer Strom a in einem sehr dünnen geschlossenen Leiter fließt.

Nach der Maxwellschen Theorie ist, wenn die von dem Strome $\mathfrak{a}$ herrührende magnetische Kraft mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet wird:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = 4\pi\mathfrak{a}.$$

Die Aufgabe, die wir uns stellen, besteht nun darin, das magnetische Feld $\mathfrak{H}$ zu finden, welches zum $\operatorname{curl} \mathfrak{H}$ gehört. Nun liegt der Maxwellschen Gleichung die Auffassung zu Grunde, daß der Strom eine gewisse Raumdichte $\mathfrak{a}$ besitze, d. h., daß ein Strom a durch jede Flächeneinheit des senkrecht zur Stromrichtung gestellten Querschnitts fließe, während in dem gewählten Beispiele der Gesamtstrom $\mathfrak{a}$ durch einen sehr dünnen Leiter fließt. Es ist aber leicht zu erkennen, daß die Wirkung des Stromes nach außen dieselbe ist, als ob das magnetische Feld von einem Stromfaden herrührte, welcher eine Liniendichte a besäße. Bezeichnen wir ein Element der Leitlinie, welche im Sinne der Stromrichtung traciert sei, mit $d\mathfrak{r}$ und führen wir wieder die Hilfsgröße $\mathfrak{A}$ ein:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A},$$

so geht Gleichung (69) über in:

$$\mathfrak{A} = \int \frac{a\, d\mathfrak{r}}{r}. \tag{69a}$$

r ist der Tensor des Radiusvektors $\mathfrak{r}$, **welcher von dem Punkte P aus, auf welchen sich $\mathfrak{A}$ bezieht, die Leitlinie des Stromfadens traciert hat.**

Es folgt für $\mathfrak{H}$ in einem beliebigen Punkte P:

$$\mathfrak{H} = \operatorname{curl} \int a \frac{d\mathfrak{r}}{r} \cdot$$

Die Operation curl kann sich naturgemäß nur auf $\frac{1}{r}$ beziehen, indem ja a und $d\mathfrak{r}$ durch Stromstärke und Form des Leiters unveränderlich bestimmt sind; d. h. die Variation bezieht sich auf den Ort von P bezw. den Anfangspunkt von $\mathfrak{r}$.

Man findet daher:

(69b)
$$\mathfrak{H} = -a \int \mathrm{V}\left(\nabla \frac{1}{r}\right) d\mathfrak{r}$$

oder:

$$\mathfrak{H} = a \int \mathrm{V} \frac{\mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}}{r^3}.$$

Beachtet man nun, daß $\mathfrak{r}$ bei der Tracierung der Leitlinie des Stromkreises einen Kegelmantel beschreibt, dessen Flächenelement:

$$d\mathfrak{g} = \frac{1}{2} \mathrm{V} \mathfrak{r}\, d\mathfrak{r}$$

ist, so kann man weiter für $\mathfrak{H}$ schreiben:

(69c)
$$\mathfrak{H} = 2a \int \frac{d\mathfrak{g}}{r^3}.$$

Der Ort von $d\mathfrak{g}$ ist natürlich der Punkt P, auf den sich $\mathfrak{H}$ bezieht.

Diese Formel liefert den Wert von $\mathfrak{H}$ für jeden Punkt eines magnetischen Feldes, welches von einem Strome herrührt. Sie drückt das Biot-Savartsche Gesetz aus. Es ist von Wichtigkeit, auf das Vorzeichen von $\mathfrak{H}$ hinzuweisen. Im allgemeinen zeigt der einer Fläche zugeordnete Vektor nach außen und dementsprechend denken wir uns die Flächenelemente traciert. Da aber die Tracierung der Kegelflächenelemente im vorliegenden Falle ganz unabhängig durch die Stromrichtung bestimmt ist — $d\mathfrak{r}$ fällt in die Stromrichtung —, so hängt das Vorzeichen von $d\mathfrak{g}$ jedesmal von der Stromrichtung ab. Die Aufeinanderfolge von $\mathfrak{r}$, $d\mathfrak{r}$ und $\mathfrak{H}$ muß einem Rechtssystem entsprechen. Um daher konsequent zu bleiben, darf der Kegelmantel nicht als Teil einer geschlossenen Fläche aufgefaßt werden.

§ 10.

Zerlegung eines Vektors in einen solenoidalen und einen wirbelfreien Anteil.

Bei der Untersuchung von Vektorfeldern ist es zuweilen erforderlich, den betreffenden Vektor in einen solenoidalen und einen wirbelfreien Anteil zu zerlegen. Nach Stokes verfährt man bei dieser Zerlegung folgendermaßen. Ist $\mathfrak{B}$ die solenoidale und $\mathfrak{C}$ die wirbelfreie Komponente von $\mathfrak{A}$, so bestehen die Gleichungen:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}, \quad \text{div.}\,\mathfrak{B} = 0, \quad \text{curl}\,\mathfrak{C} = 0. \tag{70}$$

Wir führen nun Hilfsgrößen ein, welche diesen Bedingungen genügen müssen.

$$\mathfrak{C} = -\nabla\varphi, \tag{71}$$

$$\mathfrak{B} = \text{curl}\,\mathfrak{F}. \tag{72}$$

Dadurch nimmt die Gleichung für $\mathfrak{A}$ die Form an:

$$\mathfrak{A} = \text{curl}\,\mathfrak{F} - \nabla\varphi. \tag{73}$$

Folglich ist:

$$\nabla\mathfrak{A} = -\nabla^2\varphi. \tag{74}$$

Hieraus ergibt sich der Wert von $\nabla\varphi$. Es ist nämlich, wie wir gesehen haben:

$$-\nabla\varphi = \int\frac{\mathfrak{r}_1\,\varrho\,dv}{r^2}, \tag{75}$$

wo

$$4\pi\varrho = -\nabla^2\varphi = \nabla\mathfrak{A}.$$

Daher auch:

$$\mathfrak{C} = -\nabla\varphi = \int\frac{\mathfrak{r}_1\,\text{div}\,\mathfrak{A}\,dv}{4\pi r^2}. \tag{76}$$

Nimmt man den curl von $\mathfrak{A}$, so findet man:

$$\text{curl}\,\mathfrak{A} = \text{curl}\,\mathfrak{B} = \text{curl}^2\,\mathfrak{F}.$$

Es ist aber:

$$\text{curl}^2\,\mathfrak{F} = \nabla\,\text{div}\,\mathfrak{F} - \nabla^2\mathfrak{F}.$$

Wir setzen nun:

$$\text{div}\,\mathfrak{F} = 0.$$

Dadurch wird:

$$\text{curl}^2 \mathfrak{F} = - \nabla^2 \mathfrak{F}, \tag{77}$$

und man erhält die Gleichung:

$$\text{curl}\, \mathfrak{A} = - \nabla^2 \mathfrak{F}.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist, wie gezeigt wurde:

$$\mathfrak{F} = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\text{curl}\, \mathfrak{A}}{r}\, dv.$$

Daher findet man für $\mathfrak{A}$:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \text{curl} \int \frac{\text{curl}\, \mathfrak{A}}{r}\, dv + \int \frac{\mathfrak{r}_1 \,\text{div}\, \mathfrak{A}}{4\pi r^2}\, dv. \tag{78}$$

Hiermit ist die Zerlegung von $\mathfrak{A}$ in einen solenoidalen und einen wirbelfreien Anteil erreicht.

§ 11.

Umwandlung von Differentialquotienten nach der Zeit in solche nach dem Ort.

I. Translation von Vektorfeldern.

Eine wichtige, besonders in der Elektrizitätslehre häufig vorkommende Transformation ist die eines Differentialquotienten nach der Zeit in einen solchen nach dem Ort. Die Möglichkeit einer derartigen Umwandlung ist dann vorhanden, wenn die Gesetzmäßigkeiten bekannt sind, durch welche die zeitlichen Änderungen eines Vektors an die Bewegungen des Vektorfeldes geknüpft sind. Diese Bewegungen können verschiedener Art sein. Das Feld kann sich translatorisch wie ein starrer Körper bewegen, es kann wie ein solcher rotieren, es kann deformiert werden und schließlich können Bewegungen vorhanden sein, welche als Kombinationen der erwähnten aufzufassen sind.

Betrachten wir folgenden konkreten Fall: Eine geladene Kugel sei gegen ein ruhendes Koordinatensystem orientiert. Es läßt sich dann die elektrische Kraft $\mathfrak{E}$ in jedem Punkte als Funktion der Koordinaten angeben. — Bewegt sich die Kugel gleichförmig und geradlinig, so wird sich $\mathfrak{E}$ zeitlich

ändern. Die zeitliche Änderung von $\mathfrak{E}$ in einem Punkte stehe nun in einer Beziehung zu einer anderen physikalischen gerichteten Größe $\mathfrak{A}$, und zwar bestehe Proportionalität zwischen beiden, d. h. es sei:

$$\mathfrak{A} = c\,\frac{d\,\mathfrak{E}}{dt}. \tag{79}$$

Wir nehmen an, die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ habe die Richtung $\mathfrak{i}$ und diese falle mit der Richtung der zunehmenden x zusammen. Es ist:

$$\frac{d\,\mathfrak{E}}{dt} = -\frac{\partial\,\mathfrak{E}}{\partial x}\,\frac{dx}{dt}. \tag{80}$$

Um die Berechtigung des Minuszeichens zu erkennen, beachten wir, daß in einem gegebenen Punkte $\mathfrak{E}$ sich in dem Zeitintervall dt dadurch ändert, daß an seine Stelle ein Wert tritt, welcher in dem betreffenden Zeitpunkte an einer um $v\,dt$ zurückliegenden Stelle, d. h. in Richtung der abnehmenden x bestand.

Erinnern wir uns nun, daß der Ausdruck:

$$dx(\mathfrak{v}_1\nabla)\,\mathfrak{E}$$

die Änderung von $\mathfrak{E}$ bedeutet, wenn wir in der Richtung von $\mathfrak{v}$ um die kleine Strecke dx weitergehen, so können wir schreiben:

$$\frac{\partial\,\mathfrak{E}}{\partial x} = (\mathfrak{v}_1\nabla)\,\mathfrak{E}, \tag{81}$$

und folglich:

$$\frac{d\,\mathfrak{E}}{dt} = -\,v(\mathfrak{v}_1\nabla)\,\mathfrak{E} = -\,(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{E}; \tag{82}$$

daher:

$$\mathfrak{A} = -\,c(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{E}. \tag{83}$$

Für einen beliebigen ins Auge gefaßten Punkt wird $\mathfrak{A}$ sich infolge der Fortbewegung der Kugel mit der Zeit ändern. Es ist physikalisch von Wichtigkeit, den Wert von $\mathfrak{A}$ auf Punkte zu beziehen, welche als zu dem den geladenen Körper umgebenden Raum gehörig aufgefaßt werden. Dies führt zur Einführung eines zweiten Koordinatensystems, welches an der Bewegung teilnimmt, und welches wir uns als mit dem Körper starr verbunden vorstellen wollen. Auf dieses Koordinaten-

system beziehen sich von nun an die Raumoperationen. Für $\mathfrak{A}$ kann auch durch Anwendung von Gleichung (34) geschrieben werden:

$$\mathfrak{A} = -c\mathfrak{v}\operatorname{div}\mathfrak{E} + c\mathfrak{E}\operatorname{div}\mathfrak{v} + c\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{E} + c(\mathfrak{E}\nabla)\mathfrak{v}. \tag{84}$$

Nun ist $\mathfrak{v}$ konstant. Nehmen wir ferner an, in dem betrachteten Raume sei:

$$\operatorname{div}\mathfrak{E} = 0,$$

so folgt:

$$\mathfrak{A} = c\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{E}.$$

Man kann die Hilfsgröße:

$$\mathfrak{A} = \operatorname{curl}\mathfrak{H}$$

einführen, womit man erhält:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{H} = c\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{E}. \tag{85}$$

Man integriert diese Differentialgleichung, indem man setzt:

$$\mathfrak{H} = c\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{E} + \mathfrak{K}, \tag{86}$$

wo $\mathfrak{K}$ der Bedingung genügen muß, daß:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{K} = 0.$$

Ein derartiger Vektor $\mathfrak{K}$ ist, wie wir gesehen haben, von einem skalaren Potential ableitbar:

$$\mathfrak{K} = -\nabla V.$$

Hierdurch nimmt Gleichung (86) die Form an:

$$\mathfrak{H} = c\mathrm{V}\mathfrak{v}\mathfrak{E} - \nabla V. \tag{87}$$

Zu dieser Gleichung führt die Maxwellsche Theorie, wenn wir mit $\mathfrak{H}$ die magnetische Kraft bezeichnen, mit c die Dielektrizitätskonstante eines isotropen Mediums und weiter mit $\mathfrak{A}$ das 4π-fache des elektrischen Stromes.

Die zweite Hauptgleichung für den Fall einer gleichförmig bewegten Ladung hat die Form:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{E} = -\mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt}. \tag{88}$$

μ bedeutet die magnetische Permeabilität. Behandeln wir diese Gleichung in derselben Weise wie die vorhergehende, so finden wir:

$$(89)\qquad -\mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \mu(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{H} = \mu\mathfrak{v}(\nabla\mathfrak{H}) + \mu\,\mathrm{curl}V\mathfrak{H}\mathfrak{v}.$$

Also ist, wenn wir setzen $\nabla\mathfrak{H} = 0$:

$$(90)\qquad \mathrm{curl}\,(\mathfrak{E} - \mu V\mathfrak{H}\mathfrak{u}) = 0,$$

und hieraus folgt durch Integration die zweite Hauptgleichung:

$$(91)\qquad \mathfrak{E} = \mu V\mathfrak{H}\mathfrak{u} - \nabla\varphi.$$

Im folgenden Abschnitt wird gezeigt werden, wie ein solches Gleichungssystem zur Lösung von spezialisierten Problemen angewandt wird.

II. Rotationen von Vektorfeldern.

Für die neuere Elektrizitätslehre sind die Untersuchungen des Feldes von gleichförmig, geradlinig sich bewegenden Ladungen und von rotierenden Ladungen von fundamentaler Bedeutung. Die Gleichungen, welche sich auf die erstere Art der Bewegung beziehen, sind bereits abgeleitet. Die Untersuchung rotierender Felder ist eine schwierigere und führt nur in besonders spezialisierten Fällen zu Lösungen. Dabei ist aber die Art der Behandlung des Problems so allgemein instruktiv für die Anwendung vektoranalytischer Methoden, daß ein tieferes Eingehen auf dasselbe sich lohnt.

Rotiert eine Ladung mit konstanter Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ um eine konstante Achse, so wird, wenn der stationäre Zustand eingetreten ist, das die Ladung umgebende Feld wie ein starrer Körper rotieren.

Die Maxwellschen Gleichungen, die hier zur Anwendung kommen, sind nun:

$$(92)\qquad \mathrm{curl}\,\mathfrak{E} = -\mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

$$(93)\qquad \mathrm{curl}\,\mathfrak{H} = c\frac{d\mathfrak{E}}{dt}.$$

Diese Gleichungen gelten für Raumteile, welche frei von Ladungen sind. Das Medium wird wieder als isotrop angenommen. Faßt man einen bestimmten Punkt des Feldes ins Auge, so erkennt man leicht, daß die Komponenten der elektrischen und der magnetischen Kraft in bestimmten Richtungen besondere „ausgezeichnete“ Werte annehmen müssen. Diese „ausgezeichneten“ Richtungen sind erstens die Bewegungsrichtung, zweitens die zur Bewegungsrichtung und zur Rotationsachse senkrechte radiale Richtung, drittens die Richtung der als Vektor aufgefaßten Winkelgeschwindigkeit.

Wählt man nun die Grundvektoren $\mathfrak{i}, \mathfrak{j}, \mathfrak{k}$ so, daß $\mathfrak{i}$ mit der $\mathfrak{r}$-Richtung zusammenfällt, $\mathfrak{j}$ mit der $\mathfrak{v}$-Richtung und $\mathfrak{k}$ mit der $\mathfrak{w}$-Richtung, so darf man annehmen, daß durch die Wahl dieser Hauptrichtungen eine Vereinfachung erzielt wird. Dies führt naturgemäß zur Verwendung zylindrischer Koordinaten. Diese seien durch z, r, α gekennzeichnet. Die Polarachse nehme an der Rotation teil. Dann erhält die Bedingung der solenoidalen Verteilung von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ die Form:

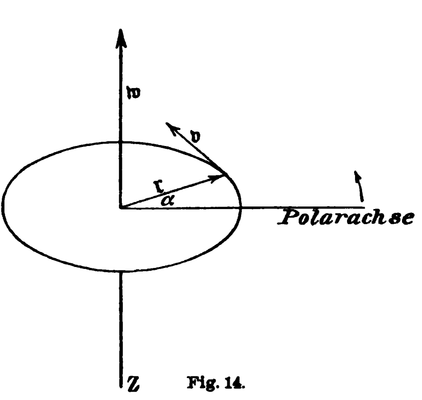


Fig. 14.

$$\text{(94)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{E} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r E_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0,$$

$$\text{(95)} \qquad \operatorname{div} \mathfrak{H} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r H_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial E_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial E_3}{\partial z} = 0.$$

Ferner sind die Komponenten des curls von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$:

$$\text{(96)} \qquad \begin{cases} (\operatorname{curl} \mathfrak{H})_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial H_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial H_2}{\partial z}\right) \\ (\operatorname{curl} \mathfrak{H})_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}\left(\frac{\partial H_1}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_3}{\partial r}\right) \\ (\operatorname{curl} \mathfrak{H})_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k}\left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r H_2)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial H_1}{\partial \alpha}\right) \end{cases}$$

und

$$(97)\qquad \begin{cases} (\operatorname{curl}\mathfrak{E})_{\mathfrak{i}} = \mathfrak{i}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial E_3}{\partial \alpha} - \frac{\partial E_2}{\partial z}\right) \\ (\operatorname{curl}\mathfrak{E})_{\mathfrak{j}} = \mathfrak{j}\left(\frac{\partial E_1}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_3}{\partial r}\right) \\ (\operatorname{curl}\mathfrak{E})_{\mathfrak{k}} = \mathfrak{k}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial (r E_2)}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial E_1}{\partial \alpha}\right). \end{cases}$$

Anmerkung. Allgemeines über Koordinatentransformationen siehe in H. Weber, Partielle Differentialgleichungen, Bd. I, S. 94—106.

In den beiden Hauptgleichungen können wir die zeitlichen Änderungen durch räumliche ersetzen. Es ist nämlich:

$$(98)\qquad \mu\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = -\mu(\mathfrak{v}\nabla)\mathfrak{H} = -\mu(\mathfrak{j}rw\nabla)\mathfrak{H},$$

indem der Tensor der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ den Wert rw hat. Die Richtung der Geschwindigkeit ist nach obiger Festsetzung die $\mathfrak{j}$-Richtung. — Für den Differentialquotienten von $\mathfrak{E}$ nach t findet man in analoger Weise:

$$(99)\qquad c\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -c(\mathfrak{j}wr\nabla)\mathfrak{E}.$$

Daher nehmen die Hauptgleichungen die Form an:

$$(100)\qquad \operatorname{curl}\mathfrak{H} = -c(\mathfrak{j}rw\nabla)\mathfrak{E},$$

$$(101)\qquad \operatorname{curl}\mathfrak{E} = \mu(\mathfrak{j}rw\nabla)\mathfrak{H}.$$

Es ist aber:

$$(102)\qquad c(\mathfrak{j}rw\nabla)\mathfrak{E} = -c\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{j}rw\mathfrak{E} - crw\operatorname{div}\mathfrak{E}$$

und

$$(103)\qquad \mu(\mathfrak{j}rw\nabla)\mathfrak{H} = -\mu\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{j}rw\mathfrak{H} - \mu rw\operatorname{div}\mathfrak{H},$$

und da $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ solenoidal verteilt sind, so ergibt sich:

$$(104)\qquad \operatorname{curl}\mathfrak{H} = c\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{j}rw\mathfrak{E},$$

$$(105)\qquad \operatorname{curl}\mathfrak{E} = \mu\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{H}\mathfrak{j}rw.$$

Durch Integration gehen diese Gleichungen über in:

$$(106)\qquad \mathfrak{H} = \mu(\mathfrak{k}wrH_1 - \mathfrak{i}wrH_3) - \nabla\varphi,$$

$$(107)\qquad \mathfrak{E} = c(-\mathfrak{k}wrE_1 + \mathfrak{i}wrE_3) - \nabla V.$$

Durch wechselseitige Substitution liefern diese Gleichungen, wenn gesetzt wird:

$$c\mu v^2 = 1,$$

wo v die Lichtgeschwindigkeit:

$$(108)\quad \begin{cases} E_1\left(1-\frac{r^2w^2}{v^2}\right) = -\frac{\partial V}{\partial r} + \mu w r \frac{\partial \varphi}{\partial z} \\ E_2 \qquad\qquad\quad = -\frac{1}{r}\frac{\partial V}{\partial \alpha} \\ E_3\left(1-\frac{r^2w^2}{v}\right) = -\frac{\partial V}{\partial z} - \mu w r \frac{\partial \varphi}{\partial r}. \end{cases}$$

$$(109)\quad \begin{cases} H_1\left(1-\frac{r^2w^2}{v^2}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial r} - c w r \frac{\partial V}{\partial z} \\ H_2 \qquad\qquad\quad = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} \\ H_3\left(1-\frac{r^2w^2}{v^2}\right) = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} + c w r \frac{\partial V}{\partial r}. \end{cases}$$

Bezüglich der Einführung der Integrationskonstanten $\nabla\varphi$ und ∇V ist zu erwähnen, daß, während ∇V offenbar einen von null verschiedenen Wert haben muß, dies bezüglich $\nabla\varphi$ nicht auf den ersten Blick erkennbar ist.

Daß $\nabla\varphi$ im allgemeinen einen von null verschiedenen Wert haben muß, läßt sich aber, wie folgt, zeigen. Setzt man in die Gleichung (95), welche die Bedingung der solenoidalen Verteilung von $\mathfrak{H}$ enthält:

$$(110)\qquad \frac{1}{r}\frac{1}{\partial r}(rH_1) + \frac{1}{r}\frac{\partial H_2}{\partial \alpha} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0,$$

diejenigen Werte der Komponenten von $\mathfrak{H}$ ein, welche Gleichung (109) unter der Annahme:

$$\varphi = \text{const.}$$

liefert, so findet man zunächst:

$$(111)\quad -\frac{\partial V}{\partial z}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{1-\frac{w^2r^2}{v^2}} - \frac{\partial^2 V}{\partial r\,\partial z}\frac{r^2}{1-\frac{w^2r^2}{v^2}} = -\frac{r^2}{\left(1-\frac{w^2r^2}{v^2}\right)}\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial r},$$

und hieraus, da für V als potential die Beziehung gilt:

(112)
$$\frac{\partial^2 V}{\partial r \partial z} = \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial r},$$
folgt:

(112a)
$$\frac{\partial V}{\partial z} = 0.$$

$\frac{\partial V}{\partial z}$ kann aber im allgemeinen nicht null sein, weil dann allgemein die z-Komponente der elektrischen Kraft auch für $w = 0$ verschwände.

Es wird aber Einzelfälle geben, in welchen die Annahme gestattet ist, daß die z-Komponente von $\mathfrak{E}$ verschwindet.

Läßt man nämlich einen sehr langen geladenen Zylinder um seine Achse rotieren, so muß aus Symmetriegründen die z-Komponente von $\mathfrak{E}$ null sein. In diesem Spezialfall werden daher bei Annahme

$$\nabla \varphi = 0$$

die Gleichungen (108) und (109) die Form annehmen:

(113)
$$\begin{cases} E_1 \left(1 - \frac{r^2 w^2}{v^2}\right) = - \frac{\partial V}{\partial r} \\ E_2 \qquad\qquad\quad = - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha} \\ E_3 \left(1 - \frac{r^2 w^2}{v^2}\right) = - \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

und:

(114)
$$\begin{cases} H_1 \left(1 - \frac{r^2 w^2}{v^2}\right) = - c w r \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \\ H_2 \qquad\qquad\quad = 0 \\ H_3 \left(1 - \frac{r^2 w^2}{v^2}\right) = \quad c w r \frac{\partial V}{\partial r}. \end{cases}$$

Setzt man zur Vereinfachung:

(115)
$$1 - \frac{r^2 w^2}{v^2} = s$$

und bildet dann:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0,$$

so erhält man:

(116)
$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{s} \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \alpha}\right) = 0$$

oder:

(117)
$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{s} \frac{\partial V}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 V}{\partial \alpha^2} = 0.$$

Überlegt man weiter, daß V im Falle eines rotierenden Zylinders unabhängig von α sein muß, so wird die Gleichung für V:

$$\frac{r}{s}\frac{\partial V}{\partial r} = C_1 \tag{118}$$

oder

$$\frac{\partial V}{\partial r} = C_1\left(\frac{1}{r} - \frac{r w^2}{v^2}\right), \tag{119}$$

$$V = C_1\left(\log r - \frac{1}{2}\frac{r^2 w^2}{v^2}\right) + C_2. \tag{120}$$

Zur Bestimmung von $\frac{\partial V}{\partial r}$ benutzen wir die allgemein gültige Beziehung, welche zwischen der Flächendichte σ und der an der betreffenden Stelle der Oberfläche wirkenden Kraft besteht. Es ist bekanntlich

$$c E_\varrho = 4\pi\sigma. \tag{121}$$

Ist die Länge des Zylinders l, die Ladung desselben q und der Radius des Querschnitts ϱ, so ist die Flächendichte der Elektrizität:

$$\sigma = \frac{q}{l\, 2\pi\varrho}. \tag{122}$$

Daher ist die Kraft an der Oberfläche des Zylinders, d. h. für $r = \varrho$:

$$c E_\varrho = \frac{2q}{l\varrho}; \tag{123}$$

und da

$$E_1 = -\frac{1}{s}\frac{\partial V}{\partial r},$$

so ist:

$$-\frac{c}{s}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\varrho = \frac{2q}{l\varrho}.$$

Ferner ist:

$$\frac{\varrho}{s}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_\varrho = C_1 = \frac{2q}{lc}, \tag{124}$$

folglich:

$$E_1 = -\frac{1}{s}\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2q}{lcr}, \tag{125}$$

$$E_2 = E_3 = 0, \tag{126}$$

$$H_3 = \frac{2qw}{l}, \tag{127}$$

$$H_1 = H_2 = 0. \tag{128}$$

Hierdurch ist das Problem der Rotation einer Ladung für den Spezialfall eines rotierenden Zylinders gelöst. Die allgemeine Lösung des Problems ist sehr verwickelt und erfordert die Lösung von Differentialgleichungen 4. Ordnung.

Anmerkung. Die vorstehende Behandlung des Problems eines rotierenden geladenen Zylinders habe ich gegeben, um an einem Beispiel zu zeigen, wie man nach Aufstellung der Grundgleichungen zu verfahren hat, um die Lösung eines konkreten Falles zu erzielen. Ich habe mich hierbei auf den Boden der Maxwellschen Theorie gestellt. Nun machen aber, wie mir scheint, gewisse Experimente, welche in jüngster Zeit angestellt wurden, eine Abänderung der Hauptgleichungen von Maxwell, ebenso wie derjenigen von Lorentz notwendig. Diese Experimente, ich erwähne hier vor allem die Versuche über einen etwaigen Einfluß der Erdbewegung auf die Interferenzerscheinungen des Lichts, welche zur Lösung der Frage bezüglich der Beweglichkeit des Äthers unternommen waren, werden von tiefergehendem Einfluß auf die Gestaltung der Elektrizitätslehre werden. Die Fragestellung bezüglich einer Beweglichkeit des Äthers wird hierbei wahrscheinlich verlassen werden.

§ 12.

Das Greensche Theorem.

Es seien U und V endliche stetige Funktionen der Lage in einem Raume, welcher von einer geschlossenen Fläche begrenzt sei.

Es ist allgemein:

$$\nabla U \nabla V = \nabla(U \nabla V) - U \nabla^2 V. \tag{129}$$

Daher:

$$\int \nabla U \nabla V dv = \int \nabla(U \nabla V) dv - \int U \nabla^2 V dv. \tag{130}$$

Die Integration ist über den begrenzten Raum zu erstrecken.

Nach dem **Gaußschen** Satze ist nun:

$$\int \nabla (U \nabla V) dv = \int (U \nabla V) d\mathfrak{g}. \tag{131}$$

Daher:

$$\int \nabla U \nabla V dv = \int (U \nabla V) d\mathfrak{g} - \int U \nabla^2 V dv. \tag{132}$$

Ist $U = V$, so besteht die Gleichung:

$$\int (\nabla V)^2 dv = \int V \nabla V d\mathfrak{g} - \int V (\nabla^2 V) dv. \tag{133}$$

Es befinde sich der vorhin betrachtete abgegrenzte Raum innerhalb einer zweiten Oberfläche. Bezeichnen wir ein Flächenelement der im Innern befindlichen Fläche mit $d\mathfrak{g}_1$ und ein solches der äußern Hülle mit $d\mathfrak{g}_2$, und wenden wir alsdann das **Greensche** Theorem auf den Zwischenraum zwischen den beiden Flächen an, so ist offenbar gemäß Gleichung (132):

$$\int (\nabla U \nabla V) dv = \int U \nabla V d\mathfrak{g}_2 - \int U \nabla V d\mathfrak{g}_1 - \int U \nabla^2 V dv. \tag{134}$$

$d\mathfrak{g}_2$ sei nun das Flächenelement einer Kugel von unendlich großem Radius.

Wir untersuchen, ob das Integral:

$$\int U \nabla V d\mathfrak{g}_2$$

verschwindet. Erwägt man, daß die Oberfläche, d. h. der Tensor von $\mathfrak{g}_2$, proportional der 2. Potenz des Radius r ist, so wird das Integral verschwinden müssen, wenn (UV) von geringerer als der -1. Potenz von r. Die vorhergehende Gleichung nimmt alsdann die Form an:

$$\int (\nabla U \nabla V) dv = \int U \nabla V d\mathfrak{g} - \int U \nabla^2 V dv. \tag{135}$$

Die Volumintegration ist nunmehr über den ganzen unendlichen Raum zu erstrecken, welcher die Fläche $\mathfrak{g}$ umgibt.

Gleichung (135) liefert durch Vertauschung von U und V:

$$\int (U \nabla V) d\mathfrak{g} - \int (V \nabla U) d\mathfrak{g} = \int U \nabla^2 V dv - \int V \nabla^2 U dv. \tag{136}$$

Es ist nützlich, an diese Gleichung eine Betrachtung anzuschließen, welche von fundamentaler Bedeutung ist, und welche auch bei dem später zu behandelnden Beltramischen Theorem in Anwendung kommt.

In dem betrachteten Felde sei die Funktion $U = \frac{1}{r}$. Wir fassen zwei Punkte in dem geschlossenen Raume ins Auge. Von dem einen festen Punkte P aus ziehen wir den Radiusvektor $\mathfrak{r}$ nach dem zweiten variablen Punkte. In P wird die Funktion U unendlich groß. Wir schließen deshalb diesen Punkt durch eine Kugelhülle von unendlich kleinem Radius ϱ vom Integrationsgebiete aus.

Man findet nun, daß der Raum, welcher von der Kugelhülle umschlossen ist, nichts zu den Volumintegralen von Gleichungen beitragen kann, denn zunächst ist:

$$\nabla^2 U = \nabla^2 \frac{1}{r} = 0, \tag{137}$$

indem:

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y) + (z_1 - z)^2}.$$

Hier bezeichnen x_1, y_1, z_1 die Koordinaten des Punktes P und x, y, z die variablen Koordinaten des Endpunktes des Radiusvektors. Es ist also, wenn wir die auf die ausgeschiedene Stelle bezüglichen Integrale durch den Index ϱ kennzeichnen:

$$\int_\varrho V \nabla^2 U dv = 0. \tag{138}$$

Ferner kann das Integral:

$$\int_\varrho U \nabla^2 V dv,$$

wenn es auf die kleine Kugel erstreckt wird, nur kleine Werte von der Ordnung ϱ^2 liefern.

Man erkennt ferner, daß

$$\int_\varrho U \nabla V d\mathfrak{g},$$

wenn die Integration auf die Oberfläche der ausgeschlossenen, sehr kleinen Kugel erstreckt wird, nur kleine Werte von der Ordnung ϱ liefern kann.

Daher bleibt nur der Ausdruck:

$$\int\limits_{\varrho} V \nabla U d\mathfrak{g}$$

in Erwägung zu ziehen.

Bezeichnet man den Wert, welchen V innerhalb der Hülle einnimmt, mit V_0, und erwägt man, daß:

$$\nabla U = \nabla \frac{1}{\mathfrak{r}} = -\frac{\mathfrak{r}_1}{\mathfrak{r}^2},$$

daß also $d\mathfrak{g}$ dieselbe Richtung hat wie $-\nabla U$, so kann gesetzt werden:

$$(139) \qquad \int\limits_{\varrho} V_0 \nabla U d\mathfrak{g} = -V_0 4\pi.$$

Hierdurch ist nachgewiesen, daß der Eigenschaft der Funktion U, im Punkte P unendlich zu werden, dadurch Rechnung getragen wird, daß man von den Oberflächenintegralen in Gleichung (136) den von der Kugelhülle herrührenden Ausdruck:

$$4\pi V_0$$

abzieht. Hierdurch geht diese Gleichung über in:

$$(140) \qquad 4\pi V_0 = -\int \nabla^2 V \frac{dv}{r} + \int \left(\frac{1}{r} \nabla V - V \nabla \frac{1}{r}\right) d\mathfrak{g}.$$

Die Volumintegration ist nun auf den ganzen begrenzten Raum zu erstrecken und die Flächenintegration auf die Begrenzung dieses Raumes. Gleichung (140) und Gleichung (136) gelten gleichzeitig, wenn U und V in dem betrachteten Gebiete mit ihren ersten Ableitungen stetig sind. Indem wir nun diese Gleichungen als zusammengehörig auffassen, sehen wir von der Spezialisierung der Funktion U, welche zu Gleichung (140) führte, ab, d. h. die einzige Beschränkung, welche wir den Funktionen auferlegen, ist die erwähnte Stetigkeit im Gebiete v.

Eine Addition der Gleichungen ergibt:

$$(141) \qquad 4\pi V_0 = \int \left(U - \frac{1}{r}\right) \nabla^2 V dv - \int V \nabla^2 U dv$$
$$- \int \left[\left(U - \frac{1}{r}\right) \nabla V - V \nabla \left(U - \frac{1}{r}\right)\right] d\mathfrak{g}.$$

In dem Falle, wo die Annahme gestattet ist, daß:

$$U - \frac{1}{r}$$

an der Oberfläche des betrachteten Gebietes verschwindet, wird:

$$\int \left(U - \frac{1}{r}\right) \nabla V d\mathfrak{g} = 0. \tag{142}$$

Kann ferner gesetzt werden:

$$\nabla^2 U = 0,$$

so folgt:

$$4\pi V_0 = \int \left(U - \frac{1}{r}\right) \nabla^2 V dv + \int V \nabla \left(U - \frac{1}{r}\right) d\mathfrak{g}. \tag{143}$$

Dies ist der eigentliche Satz von Green.

$U - \frac{1}{r}$ wird die Greensche Funktion genannt. Sie spielt eine wichtige Rolle in der theoretischen Physik.

Die obige Gleichung läßt sich auch schreiben:

$$4\pi V_0 = \int G \nabla^2 V dv + \int V \nabla G d\mathfrak{g}.$$

§ 13.

Der Satz von Beltrami und das Theorem von Poincaré-Lorentz.

Durch Vermittlung eines mit den Greenschen Sätzen verwandten Theorems kann man den Hauptgleichungen des elektromagnetischen Feldes eine Form verleihen, welche es gestattet, die Vorstellungen der älteren Elektrizitätslehre, wie sie insbesondere von W. Weber entwickelt wurden, in vielen wichtigen Punkten mit der Maxwellschen Theorie oder vielmehr mit derjenigen neueren Richtung in der Elektrizitätslehre in Einklang zu bringen, welche sich auf Maxwellschen Grundlagen aufbaut und speziell die elektrodynamischen Wirkungen auf die Bewegungen von Elektronen zurückführt. Das betreffende Theorem wurde zuerst von Poincaré und Lorentz abgeleitet und angewandt. Wir gehen vom Beltramischen Satze aus.

Die Ableitung dieses Satzes gewinnt an Einfachheit durch Anwendung der vektoranalytischen Methode.

Es sei V mit seinen ersten Derivierten in einem der Betrachtung unterzogenen Gebiete eine stetige, endliche Funktion des Ortes und des Abstandes r von einem festen willkürlichen Punkte. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{r}_1$ einen konstanten Einheitsvektor in der Richtung von $\mathfrak{r}$.

Es gelten nun folgende Identitäten:

$$\text{(a)} \qquad \nabla[\mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1\nabla)V] = (\mathfrak{r}_1\nabla)^2 V,$$

wo symbolisch $(\mathfrak{r}_1\nabla)^2 V$ für $(\mathfrak{r}_1\nabla)[(\mathfrak{r}_1\nabla)V]$ gesetzt ist und nach dem Gaußschen Satze kommt:

$$\text{(a')} \qquad \int \mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1\nabla)V d\mathfrak{g} = \int (\mathfrak{r}_1\nabla)^2 V dv$$

und daher auch:

$$\text{(a'')} \qquad \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)V d\mathfrak{g} = \int \frac{1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)^2 V dv.$$

Ferner ist:

$$-\nabla\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}V\right) = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}\nabla V + V\nabla^2\frac{1}{r},$$

und da:

$$\nabla^2\frac{1}{r} = 0 -,$$

so folgt:

$$-\nabla\left(\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}V\right) = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}\nabla V$$

und daher:

$$\text{(b)} \qquad -\int \frac{\mathfrak{r}_1 V}{r^2} d\mathfrak{g} = -\int \frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}\nabla V dv;$$

weiter ist:

$$\text{(c)} \qquad -\nabla\left(\frac{1}{r}\nabla V\right) = \frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}\nabla V - \frac{1}{r}\nabla^2 V,$$

folglich:

$$\text{(c')} \qquad -\int \frac{1}{r}\nabla V d\mathfrak{g} = \int \frac{1}{r^2}(\mathfrak{r}_1\nabla)V dv - \int \frac{1}{r}\nabla^2 V dv.$$

Gelten die Gleichungen (a''), (b) und (c') gleichzeitig, so ergibt sich durch Addition derselben:

$$\text{(144)} \qquad \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)V d\mathfrak{g} - \int \frac{\mathfrak{r}_1 V}{r^2} d\mathfrak{g} - \int \frac{1}{r}\nabla V d\mathfrak{g}$$
$$= \int \frac{1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)^2 V dv - \int \frac{1}{r}\nabla^2 V dv.$$

Liegt der Punkt, von dem aus die Radienvektoren gezogen werden, innerhalb v, so ist derselbe durch eine unendlich kleine Kugelhülle vom Integrationsgebiet auszuschließen. Stellt man dann bei Anwendung vorstehender Gleichung auf diese Kugel dieselben Überlegungen an, wie bei Ableitung von Gleichung (140), so findet man, daß nur das Oberflächenintegral:

$$\int \frac{\mathfrak{r}_1 V}{r^2} d\mathfrak{g}$$

über die unendlich kleine Kugelhülle einen Beitrag liefert. Dieses Integral wird, wie bereits früher gezeigt wurde, den Wert annehmen:

$$4\pi V_0.$$

Man erhält also die wichtige Beziehung:

$$(145) \quad -4\pi V_0 = \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla) V d\mathfrak{g} - \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r^2} V d\mathfrak{g} - \int \frac{1}{r}\nabla V d\mathfrak{g} + \int \frac{1}{r}\nabla^2 V dv - \int \frac{1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)^2 V dv.$$

Dieser Satz rührt von Beltrami her.

Denkt man sich die Begrenzungsflächen ins Unendliche gerückt und nimmt man an, daß dort infolge der Eigenschaft von V die Oberflächenintegrale verschwinden, so hat man die Gleichung:

$$(146) \quad 4\pi V_0 = \int (\mathfrak{r}_1\nabla)^2 V \frac{dv}{r} - \int \nabla^2 V \frac{dv}{r}.$$

Diese Gleichung findet eine wichtige Anwendung in der Lorentzschen Elektronentheorie. Wir hatten für die magnetische und die elektrische Kraft im Felde einer bewegten Ladung die Maxwellschen Gleichungen verwandt:

$$\text{curl } \mathfrak{E} = -\mu \frac{d\mathfrak{H}}{dt},$$

$$\text{curl } \mathfrak{H} = c \frac{d\mathfrak{E}}{dt}.$$

Indem nun Lorentz nach dem Vorgange von Fitz Gerald dem Konvektionsstrom Rechnung trägt und gleichzeitig seine

Auffassung von der Natur der Dielektrika zum Ausdruck bringt, schreibt er:

$$\text{(I)} \qquad -\frac{d\mathfrak{H}}{dt} = \operatorname{curl} \mathfrak{E},$$

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{v^2}\frac{d\mathfrak{E}}{dt} + 4\pi\mathfrak{C} = \operatorname{curl} \mathfrak{H}.$$

v bezeichnet in diesen Gleichungen die Lichtgeschwindigkeit und $\mathfrak{C}$ den Konvektionsstrom. Der solenoidalen Eigenschaft von $\mathfrak{H}$ wird bei Einführung der Hilfsgröße $\mathfrak{A}$ Rechnung getragen, indem speziell nach dem Vorgang von E. Wiechert gesetzt wird:

$$(147) \qquad \mathfrak{H} = \operatorname{curl} \mathfrak{A};$$

daher ist:

$$(148) \qquad -\operatorname{curl} \frac{\partial \mathfrak{A}}{\partial t} = \operatorname{curl} \mathfrak{E},$$

oder integriert:

$$\text{(Ia)} \qquad \mathfrak{E} = -\frac{d\mathfrak{A}}{dt} - \nabla\varphi.$$

Für Raumteile, welche frei von Ladungen sind, ist:

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0;$$

daher:

$$(149) \qquad -\frac{d}{dt}\nabla\mathfrak{A} - \nabla^2\varphi = 0.$$

Setzt man ferner in Gleichung II den Wert für $\frac{d\mathfrak{E}}{dt}$ ein, nämlich:

$$(150) \qquad \frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} - \frac{d}{dt}\nabla\varphi,$$

so findet man:

$$(151) \qquad \operatorname{curl} \mathfrak{H} = -\frac{1}{v^2}\frac{d^2\mathfrak{A}}{dt^2} - \frac{d}{dt}\frac{1}{v^2}\nabla\varphi + 4\pi\mathfrak{C}.$$

Es ist aber:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{H} = \operatorname{curl}^2 \mathfrak{A} = \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}.$$

Es folgt hieraus:

$$(152) \qquad \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A} = -\frac{1}{v^2}\frac{d\mathfrak{A}}{dt^2} - \frac{1}{v^2}\frac{d}{dt}\nabla\varphi + 4\pi\mathfrak{C}.$$

Wir knüpfen nun an die Hilfsgröße $\mathfrak{A}$ die weitere Bedingung:

$$(153) \qquad v^2\nabla\mathfrak{A} + \frac{d\varphi}{dt} = 0;$$

daher:

$$v^2 \nabla \operatorname{div} \mathfrak{A} = -\frac{d}{dt} \nabla \varphi.$$

Setzt man dies in Gleichung (152) ein, so erhält man die erste Hauptgleichung:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = 4\pi v^2 \mathfrak{C} + v^2 \nabla^2 \mathfrak{A}. \tag{154}$$

Ferner findet man für Stellen des Raumes, wo elektrische Ladungen mit der Dichte ϱ verteilt sind, aus Gleichung (Ia):

$$\operatorname{div} \mathfrak{E} = 4\pi v^2 \varrho = -\frac{d}{dt} \nabla \mathfrak{A} - \nabla^2 \varphi \tag{155}$$

und unter Benutzung der bereits angewandten Beziehung:

$$v^2 \nabla \mathfrak{A} = -\frac{\partial \varphi}{\partial t}$$

bezw.:

$$\frac{d}{dt} \nabla \mathfrak{A} = -\frac{1}{v^2} \frac{d^2 \varphi}{dt^2}.$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 4\pi \varrho v^4 + v^2 \nabla^2 \varphi. \tag{156}$$

Diese Gleichung und Gleichung (154), welche analog von Wiechert abgeleitet werden, sind nun die Grundgleichungen der Lorentzschen Theorie. Diese werden durch Vermittlung von (146) umgeformt. Der Gedanke, welcher dieser Umformung zu Grunde liegt, ist folgender. Da die elektromagnetischen Erregungen, welche durch die Bewegungen der Elektronen verursacht werden, sich mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten, so wird es möglich sein, die in einem bestimmten Zeitpunkte t_0 an einer bestimmten Stelle P des Raumes bestehende Erregung zu erklären als verursacht durch eine Elektronenbewegung, die zu einer bestimmten früheren Zeit t stattfand, so daß die damalige Erregung in der Zeit $t_0 - t$ nach P gelangte. Das betreffende Elektron war dann zur Zeit t eine Strecke

$$r = v(t_0 - t) \tag{157}$$

von P entfernt.

Es kann daher gesetzt werden in Gleichung (156):

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}, \tag{158a}$$

und in Gleichung (155):

(158b) $$\frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2}.$$

Dadurch nehmen diese Gleichungen die Form an:

(159) $$4\pi \varrho v^4 = v^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - v^2 \nabla^2 \varphi,$$

(160) $$4\pi v^2 \mathfrak{C} = v^2 \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2} - v^2 \nabla^2 \mathfrak{A},$$

oder:

(161) $$4\pi \varrho v^2 = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} - \nabla^2 \varphi,$$

(162) $$4\pi \mathfrak{C} = \frac{\partial^2 \mathfrak{A}}{\partial r^2} - \nabla^2 \mathfrak{A}.$$

Wenden wir nun die vorher abgeleitete Gleichung (146):

$$4\pi \varphi_0 = \int (\mathfrak{r}_1 \nabla)^2 \varphi \frac{dv}{r} - \int \nabla^2 \varphi \frac{dv}{r}$$

an, so finden wir unter Berücksichtigung von:

$$(\mathfrak{r}_1 \nabla)^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2},$$

(163) $$\varphi_{t=t_0} = \int \left(\varrho v^2 \frac{dv}{r} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{v}}$$

und analog:

(164) $$\mathfrak{A}_{t=t_0} = \int \left(\mathfrak{C} \frac{dv}{r} \right)_{t=t_0 - \frac{r}{v}}.$$

Wie bei Kenntnis von φ und $\mathfrak{A}$ die Werte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{H}$ zu finden sind, liegt auf der Hand (siehe Gleichung 147 und Ia).

Die Analogie dieser Gleichungen mit denjenigen der Fernwirkungstheorie tritt deutlich hervor.

Es ist noch besonders darauf zu achten, daß bei Anwendung der Gleichungen auf die Bewegungen eines Elektrons letzteres nicht als punktförmig aufzufassen ist. Die Ladung ist als räumlich verteilt in Rechnung zu ziehen. Bei Bildung der Integrale ist daher zu berücksichtigen, daß infolge der Verschiedenheit der Entfernungen r der Volumelemente von dem festen Punkte verschiedene Zeiten t in Rechnung zu ziehen sind. Diesen verschiedenen Zeiten entsprechen verschiedene Lagen des Schwerpunkts des Elektrons.

§ 14.
Das Huyghenssche Prinzip.

Die Gleichung von **Beltrami**:

$$4\pi\varphi_0 = -\int \frac{\mathfrak{r}_1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)\varphi\, d\mathfrak{g} + \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}\varphi\, d\mathfrak{g} + \int \frac{1}{r}\nabla\varphi\, d\mathfrak{g}$$
$$-\int \frac{1}{r}\nabla^2\varphi\, dv + \int \frac{1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)^2\varphi\, dv$$

kann auch dazu dienen, das **Huyghenssche** Prinzip mathematisch zu formulieren.

Besteht an einer Stelle des Raumes eine durch Wellen erzeugte Erregung, so kann man sich diese Erregung als von den Punkten einer die betreffende Stelle einschließenden Fläche ausgehend vorstellen, vorausgesetzt, daß diese im übrigen beliebig konstruierte Fläche die Quellen der Wellenbewegung nicht mit einschließt. Dieser von **Huyghens** herstammende Gedanke wurde zuerst von **Kirchhoff** formuliert und später von **Beltrami** aus der Gleichung (145) abgeleitet.

Die Überlegungen sind ganz analog denjenigen, welche bei dem **Poincaré-Lorentz**schen Satze in Betracht kommen. Die Wellenbewegung breite sich wieder mit der Geschwindigkeit v aus. Dann ist, wie früher:

$$r = v(t_0 - t)$$

und

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = v^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = v^2(\mathfrak{r}_1\nabla)^2\varphi.$$

Folgen daher die Schwingungen dem Gesetze:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = v^2\nabla^2\varphi, \tag{165}$$

d. h.:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} = \nabla^2\varphi,$$

so werden die Volumintegrale in Gleichung (145) verschwinden, und man erhält für eine beliebige Stelle, wo φ den Wert φ_0 hat, wenn man diese Stelle durch eine beliebige Fläche einschließt:

$$4\pi\varphi_0 = \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r^2}\varphi_{t_0-\frac{r}{v}}\, d\mathfrak{g} - \int \frac{\mathfrak{r}_1}{r}(\mathfrak{r}_1\nabla)\varphi_{t_0-\frac{r}{v}}\, d\mathfrak{g} + \int \frac{1}{r}\nabla\varphi_{t_0-\frac{r}{v}}\, d\mathfrak{g}, \tag{166}$$

oder:

$$4\pi\varphi_0 = \int \frac{1}{r}\nabla\varphi_{t_0-\frac{r}{v}}\, d\mathfrak{g} - \int \mathfrak{r}_1(\mathfrak{r}_1\nabla)\left(\frac{\varphi}{r}\right)_{t_0-\frac{r}{v}} d\mathfrak{g}. \tag{166a}$$

Diese Gleichung drückt das Huyghenssche Prinzip aus. Der Strahlungsvorgang in einem Punkte wird dadurch zurückgeführt auf Erregungen, welche zu einer früheren Zeit $t = t_0 - \frac{r}{V}$ von den Elementen einer den betreffenden Punkt beliebig umschließenden Fläche mit Lichtgeschwindigkeit ausgegangen waren.

§ 15.

Zur Hydrodynamik idealer Flüssigkeiten.

Der Helmholtzsche Satz.

Die folgenden Entwicklungen beziehen sich auf sogenannte ideale Flüssigkeiten, d. h. solche, welchen weder Kompressibilität, innere Reibung, noch Kapillarität zukommt.

Die Bewegungserscheinungen solcher Flüssigkeiten sind durch größere Einfachheit ihrer Gesetzmäßigkeiten ausgezeichnet.

Bei der Untersuchung des Bewegungszustandes einer Flüssigkeit kann man sich fragen, wie ändert sich dieser Bewegungszustand im Laufe der Zeit in einem bestimmten Punkte des Raumes. Man kann aber auch ein bestimmtes Flüssigkeitsteilchen ins Auge fassen und sich fragen, wie ändert sich der Bewegungszustand dieses Teilchens im Laufe der Zeit. Wir wenden uns hauptsächlich zur Beantwortung der letzteren Frage.

Besteht in einem Punkte im Innern einer Flüssigkeit der Druck p, so wirkt daselbst eine Kraft:

$$-\nabla p,$$

und das in dem betreffenden Punkte befindliche Flüssigkeitsteilchen würde, wenn keine andere Kraft vorhanden wäre, eine Beschleunigung erfahren, welche gleich wäre:

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p, \tag{167}$$

wenn $\mathfrak{u}$ die Geschwindigkeit des Teilchens ist, und wenn ϱ die als konstant angenommene Dichte bedeutet. Wirkt außerdem

noch eine äußere Kraft $\mathfrak{F}$ auf das Teilchen, so beträgt die Beschleunigung:

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p. \tag{168}$$

In dem Differentialquotienten bedeutet d eine unendlich kleine Änderung, welche dasselbe Teilchen erfährt. Diese Änderung rührt von zwei Ursachen her. Befindet sich nämlich das Teilchen zur Zeit t in P, so wird die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ an dieser Stelle in der Zeit dt sich um einen gewissen Betrag ändern und zwar um:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} dt;$$

durch $\frac{\partial}{\partial t}$ ist eine Differentiation bei konstantem Ort angedeutet.

Ferner ändert sich die Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ dadurch, daß das Teilchen in der Richtung von $\mathfrak{u}$ zu einer Stelle gelangt, wo die Geschwindigkeit eine andere ist. Bezeichnen wir eine sehr kleine Wegstrecke in dieser Richtung mit ds, so ist die zweite Änderung ausgedrückt durch:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} u\, dt.$$

Denn offenbar ist die Änderung von $\mathfrak{u}$ pro Einheit der Strecke:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s}.$$

In einer Sekunde legt das Teilchen u cm zurück. Für die Strecke u beträgt daher die Änderung:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} u.$$

Folglich in der Zeit dt:

$$\frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial s} u\, dt.$$

Dieser Ausdruck nimmt aber die Form an, wie wir gesehen haben:

$$(\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{u}\, dt.$$

Daher besteht die Gleichung:

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \frac{\partial \mathfrak{u}}{\partial t} + (\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{u} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p. \tag{169}$$

Dies ist die vektoranalytische Form der Eulerschen Gleichungen.

Es ist nun:

$$(170)\qquad (\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{u} = \frac{1}{2}\nabla\mathfrak{u}\,\mathfrak{u} + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{u}\cdot\mathfrak{u};$$

daher:

$$(171)\qquad \frac{d\mathfrak{u}}{dt} = \frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\mathfrak{u}^2 + 2\,\mathrm{V}\mathfrak{w}\,\mathfrak{u} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p.$$

Nimmt man den curl von beiden Seiten der Gleichung, so findet man:

$$(172)\qquad 2\frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t} = 2\,\mathrm{curl}\,\mathrm{V}\mathfrak{w}\,\mathfrak{u} = \mathrm{curl}\,\mathfrak{F}.$$

Berücksichtigt man ferner, daß:

$$(173)\qquad \nabla\mathfrak{w} = \nabla\frac{1}{2}\nabla\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{u} = 0,$$

und daß infolge der Inkompressibilität:

$$\nabla\mathfrak{u} = 0,$$

so wird:

$$(174)\qquad \mathrm{curl}\,\mathrm{V}\mathfrak{w}\,\mathfrak{u} = (\mathfrak{u}\nabla)\,\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\nabla)\,\mathfrak{u},$$

und man erhält:

$$(175)\qquad \frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t} + (\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{w} - (\mathfrak{w}\nabla)\,\mathfrak{u} = \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{F}.$$

Knüpft man nun dieselben Erwägungen an:

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt},$$

wie an:

$$\frac{d\mathfrak{u}}{dt},$$

so erkennt man, daß es gestattet ist, zu setzen:

$$(176)\qquad \frac{\partial\mathfrak{w}}{\partial t} = \frac{d\mathfrak{w}}{dt} - (\mathfrak{u}\nabla)\mathfrak{w}.$$

Daher erhält man die berühmte Helmholtzsche Gleichung:

$$(177)\qquad \frac{d\mathfrak{w}}{dt} = (\mathfrak{w}\nabla)\,\mathfrak{u} + \frac{1}{2}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{F}.$$



Ist $\mathfrak{F}$ von einem Potential ableitbar, so ist:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{F} = 0,$$

und es gilt dann die Beziehung:

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = (\mathfrak{w}\nabla)\mathfrak{u}. \tag{178}$$

Ist ferner die Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{w}$ in irgend einem Zeitpunkt null, so wird:

$$\frac{d\mathfrak{w}}{dt} = 0. \tag{179}$$

In Worten: Rotiert ein Flüssigkeitsteilchen zu irgend einer Zeit nicht, so rotiert es niemals.

Teilchen, welche rotieren, werden niemals aufhören zu rotieren.

Über die Potentialbewegung idealer Flüssigkeiten. Die Bewegung einer Kugel in einer idealen Flüssigkeit.

Von den so interessanten Bewegungserscheinungen der Flüssigkeiten wollen wir noch einen einfacheren Spezialfall der Betrachtung unterziehen.

Die Eulersche Gleichung:

$$\frac{\partial\mathfrak{u}}{\partial t} + \frac{1}{2}\nabla\mathfrak{u}^2 + 2V\mathfrak{w}\mathfrak{u} = \mathfrak{F} - \frac{1}{\varrho}\nabla p$$

läßt sich für den Fall, daß $\mathfrak{u}$ von einem Potential φ ableitbar ist, und daß der äußeren Kraft $\mathfrak{F}$ ebenfalls ein Potential V zukommt, auf die Form bringen:

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\varphi + \frac{1}{2}\nabla(\nabla\varphi)^2 = \nabla V - \frac{1}{\varrho}\nabla p, \tag{180}$$

indem:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{u} = 2\,\mathfrak{w} = 0.$$

Diese Gleichung läßt sich integrieren und liefert dann:

$$f(t) + \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 = V - \frac{1}{\varrho}p. \tag{181}$$

Zur Bestimmung von φ und p dient noch die Gleichung, welche die Inkompressibilität der Flüssigkeit ausdrückt:

$$\nabla^2\varphi = 0. \tag{182}$$

Diese Gleichungen genügen zur eindeutigen Bestimmung von p und den Derivierten von φ, d. h. den Geschwindigkeitskomponenten. In einem einfach zusammenhängenden Raume ist auch φ eine eindeutige Funktion des Ortes und der Zeit. Wirkt auf die Flüssigkeitsteilchen keine äußere Kraft, so kann man setzen:

$$V = 0$$

und erhält:

$$f(t) + \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 = -\frac{1}{\varrho} p.$$

Ist die Strömung stationär, so wird:

$$f(t) = K',$$

wo K' eine Konstante bedeutet und

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0.$$

Man hat daher für die stationäre Strömung einer idealen von Wirbelbewegung freien Flüssigkeit, in welcher nur der hydrodynamische Druck p wirksam ist, die Gleichungen:

$$\frac{1}{2}(\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{\varrho} p = K, \tag{183}$$

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Bei der Untersuchung eines konkreten Falles müssen die experimentellen Bedingungen zur Bestimmung von φ genau umschrieben sein.

Nehmen wir den von Dirichlet behandelten Fall, wo eine Kugel vom Radius R in einer unendlich großen Flüssigkeitsmasse ruht. Die Bewegung der Flüssigkeit habe die Richtung der zunehmenden z in einem Koordinatensystem, dessen Ursprung im Mittelpunkt der Kugel sich befinde. In der Nähe der Kugel wird die Bewegung der Flüssigkeitsteilchen von der z-Richtung abweichen. Dicht an der Kugel bewegen sich die Teilchen längs der Oberfläche. Bezeichnet daher r den Abstand eines Teilchens vom Mittelpunkt der Kugel, so wird für:

$$R = r$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0.$$

Setzt man nun:

(184) $$\varphi = u_0 \cos(r\mathfrak{z})\left(\frac{R^3}{2r^2} + r\right),$$

wo u_0 die Geschwindigkeit in der $\mathfrak{z}$-Richtung in weiter Entfernung von der Kugel bedeutet, so genügt diese Beziehung der obigen Bedingung und der Forderung:

$$\nabla^2 \varphi = 0.$$

Die Komponenten der Geschwindigkeit sind demnach:

(185) $$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = & -\dfrac{3}{2} u_0 \dfrac{R^3 x \cos(\mathfrak{r}\mathfrak{z})}{r^4} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = & -\dfrac{3}{2} u_0 \dfrac{R^3 y \cos(\mathfrak{r}\mathfrak{z})}{r^4} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = u_0 & -\dfrac{3}{2} \dfrac{u_0 R^3 z \cos(\mathfrak{r}\mathfrak{z})}{r^4} + \dfrac{1}{2} u_0 \dfrac{R^3}{r^3}. \end{cases}$$

Die Geschwindigkeit $u = (\nabla \varphi)$ nimmt den Wert an:

$$u = \nabla \varphi = \sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}.$$

Um die Geschwindigkeit an der Kugeloberfläche zu finden, setzt man in diesen Ausdruck die Werte ein, welche $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ annehmen, wenn in denselben

$$r = R$$

gesetzt wird und man dabei beachtet, daß:

$$\cos(\mathfrak{r}\mathfrak{z}) = \frac{z}{r};$$

man findet dann:

(186) $$u_{r=R} = (\nabla \varphi)_{r=R} = \frac{3}{2} \frac{u_0}{R} \sqrt{R^2 - z^2}.$$

Die spezialisierte **Eulersche** Gleichung lautet dann für Stellen an der Oberfläche:

(187) $$\frac{9}{8} u_0^2 \frac{R^2 - z^2}{R^2} + \frac{1}{\varrho} p = K;$$

und daher:

(188) $$p = K' - \frac{9\varrho}{8} u_0^2 \frac{R^2 - z^2}{R^2}.$$

Man erkennt sofort, daß p für positive und negative z den gleichen Wert erhält, d. h. der hydrodynamische Druck p wirkt

auf den Seiten der Kugel, welche der Stromrichtung zu-, bezw. abgewandt sind, mit derselben Stärke.

Die Folge ist, daß die Kugel in der strömenden Flüssigkeit ruht. Da die relative Bewegung in dem betrachteten Falle umkehrbar ist, so folgt auch, daß eine Kugel, welche sich in einer unbegrenzten idealen ruhenden Flüssigkeit mit geradliniger gleichförmiger Geschwindigkeit bewegt, keinen Widerstand erfährt, ein Resultat, welches zuerst von Dirichlet gefunden wurde.

In den vorstehenden Entwicklungen haben wir ein einzelnes Flüssigkeitsteilchen der Untersuchung unterzogen. Man kann nun weiter die Frage stellen, wie gestaltet sich der Bewegungszustand einer abgegrenzten Flüssigkeitsmenge an einer bestimmten Stelle des Raumes. Fassen wir ein unendlich kleines kugelförmiges Volumen der Flüssigkeit an einer bestimmten Stelle ins Auge, so kann in der sehr kurzen Zeit dt dieses Volumen eine Translation als Ganzes erfahren haben, es kann eine Rotation ausgeführt haben, oder die Kugel hat eine im allgemeinen elliptische Deformation erlitten. Schließlich kann auch eine Kombination dieser Bewegungsarten eingetreten sein. Wir haben nun früher [siehe Gleichung (41)] für den Bewegungszustand in der unmittelbaren Umgebung eines bestimmten Punktes den ganz allgemeinen Ausdruck gefunden, welcher alle Bewegungsarten einschließt:

$$(188a) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_0 + \nabla_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{A}\mathfrak{r}) + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r},$$

wo $\mathfrak{r}$ die vom Punkte aus gezogenen unendlich kleinen Radienvektoren bedeuten.

Nun wissen wir, daß

$$\mathfrak{A}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r}$$

dem translatorischen und dem rotatorischen Anteil der Bewegung Rechnung trägt. Folglich finden wir den der Deformation zukommenden Anteil $\mathfrak{D}$ durch Subtraktion von dem allgemeinen Ausdruck:

$$(189) \qquad \mathfrak{D} = \nabla_{\mathfrak{r}}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r} + \frac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{A}\,\mathfrak{r}.$$

Der curl dieses Ausdrucks muß null sein, weil er allein der Deformation Rechnung trägt. Nun erhält man für curl $\mathfrak{D}$:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{D} = \operatorname{curl}\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{r}) - \operatorname{curl}\nabla_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{A}\mathfrak{r}) + \frac{1}{2}\operatorname{curl}V\operatorname{curl}\mathfrak{A}\mathfrak{r}.$$

Es ist aber, weil $(\mathfrak{A}\mathfrak{r})$ ein Skalar:

$$\operatorname{curl}\nabla(\mathfrak{A}\mathfrak{r}) = 0,$$

ferner:

$$\operatorname{curl}\nabla_{\mathfrak{r}}(\mathfrak{A}\mathfrak{r}) = \operatorname{curl}\mathfrak{A},$$

daher:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{D} = -\operatorname{curl}\mathfrak{A} + \frac{1}{2}\operatorname{curl}V\operatorname{curl}\mathfrak{A}. \tag{190}$$

Nimmt man den curl von Gleichung (188a), so findet man:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{A} = -\operatorname{curl}\mathfrak{A} + \operatorname{curl}V\operatorname{curl}\mathfrak{A}\mathfrak{r},$$

oder:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{A} = \frac{1}{2}\operatorname{curl}V\operatorname{curl}\mathfrak{A}\mathfrak{r}.$$

Setzt man dies in Gleichung (190) ein, so findet man in der Tat:

$$\operatorname{curl}\mathfrak{D} = 0.$$

Zusammenstellung der wichtigsten Formeln und Definitionen.

Ein physikalischer Vektor ist durch Richtung, Größe und Ort bestimmt. Den Zahlenwert eines Vektors nennt man Tensor. Ein Einheitsvektor ist ein solcher, dessen Zahlenwert 1 ist. Man kennzeichnet ihn durch den Index 1, z. B. $\mathfrak{A}_1$. Jeder Vektor läßt sich in folgender Weise durch das Produkt eines in seine Richtung fallenden Einheitsvektors und seines Tensors darstellen:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1 A.$$

Addition von Vektoren.

Eine Summierung der Größen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$ drückt man durch die Vektorgleichung aus:

$$\mathfrak{A} + \mathfrak{B} + \mathfrak{C} = \mathfrak{R}.$$ [S. 3.]

Unter der Komponente eines Vektors in einer bestimmten Richtung versteht man die geometrische Projektion des Vektors auf diese Richtung. Die Komponente von $\mathfrak{A}$ in der Richtung von $\mathfrak{C}$ schreibt sich:

$$\mathfrak{A}_{\mathfrak{C}} = \mathfrak{C}_1 A \cos(\mathfrak{A}\mathfrak{C}).$$ [Gl. (2) S. 6.]

Ein Vektor $\mathfrak{C}$, welcher in der Ebene zweier gegebenen Vektoren $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ liegt, ist ganz allgemein darstellbar durch:

$$\mathfrak{C} = m\mathfrak{A} + n\mathfrak{B},$$

wo m und n Zahlen sind.

Man kann einen Vektor in drei zueinander senkrechte Komponenten zerlegen, so daß die Richtungen dieser Komponenten mit drei gegebenen Grundrichtungen zusammenfallen. Einheitsvektoren, welche in diese Richtungen fallen, heißen Grundvektoren. Stehen die Grundvektoren senkrecht zueinander,

so werden sie mit $\mathfrak{i}$, $\mathfrak{j}$, $\mathfrak{k}$ bezeichnet. Dann ist ein beliebiger Vektor $\mathfrak{A}$ darstellbar durch:

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{i}A_1 + \mathfrak{j}A_2 + \mathfrak{k}A_3. \qquad \text{[S. 6.]}$$

Vektorprodukte und skalare Produkte.

$V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ bedeutet einen Vektor, welcher auf der Ebene von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ senkrecht steht und dessen Tensor gleich ist $AB \sin(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$. Die Aufeinanderfolge der Richtungen von $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ entspricht einem Rechtssystem:

$$V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{i}(A_2B_3 - A_3B_2) + \mathfrak{j}(A_3B_1 - B_3A_1) + \mathfrak{k}(A_1B_2 - A_2B_1).$$

[Gl. (5a) S. 10.]

Das skalare Produkt von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ wird durch einfache Nebeneinanderstellung gekennzeichnet, und sein Zahlenwert ist:

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = AB\cos(\mathfrak{A}\mathfrak{B}). \qquad \text{[S. 14.]}$$

Das dreifache Produkt $\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist ein Skalar und hat den Wert:

$$\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \begin{vmatrix} C_1, & C_2, & C_3 \\ A_1, & A_2, & A_3 \\ B_1, & B_2, & B_3 \end{vmatrix}. \qquad \text{[Gl. (10) S. 17.]}$$

Das dreifache Produkt $V\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist ein Vektor und hat den Wert (siehe S. 19):

$$V\mathfrak{C}V\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}(\mathfrak{B}\mathfrak{C}) - \mathfrak{B}(\mathfrak{A}\mathfrak{C}). \qquad \text{[Gl. (16) S. 20.]}$$

Über Differentiation.

$$\nabla = \mathfrak{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathfrak{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathfrak{k}\frac{\partial}{\partial z}. \qquad \text{[S. 23.]}$$

$$\nabla\mathfrak{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z} = \operatorname{div}\mathfrak{A}. \qquad \text{[Gl. (26) S. 24.]}$$

Satz von Gauß:

$$\int \mathfrak{A}\,d\mathfrak{g} = \int \operatorname{div}\mathfrak{A}\,dv. \qquad \text{[Gl. (27) S. 26.]}$$

$$\frac{dA}{dr} = \mathfrak{r}_1(\nabla A).$$ [Gl. (29) S. 28.]

$$dA = d\mathfrak{r}(\nabla A).$$ [Gl. (30) S. 28.]

$$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{\mathfrak{r}_1}{r^2} = -\frac{\mathfrak{r}}{r^3}.$$ [S. 29.]

$$\mathrm{V}\nabla\mathfrak{A} = \operatorname{curl}\mathfrak{A} = \mathfrak{i}\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + \mathfrak{j}\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right) + \mathfrak{k}\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right).$$ [Gl. (33) S. 29.]

$$\operatorname{div}\operatorname{curl}\mathfrak{A} = 0.$$ [Gl. (33 a) S. 30.]

$$\operatorname{curl}\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{D} = (\mathfrak{D}\nabla)\mathfrak{C} - (\mathfrak{C}\nabla)\mathfrak{D} + \mathfrak{C}\operatorname{div}\mathfrak{D} - \mathfrak{D}\operatorname{div}\mathfrak{C}.$$ [Gl. (34) S. 30.]

$$\operatorname{curl}_{\mathfrak{r}}\mathrm{V}\mathfrak{C}\mathfrak{r} = 2\mathfrak{C}.$$ [Gl. (35) S. 31.]

$$\operatorname{curl}\mathfrak{r} = 0.$$ [S. 31.]

$$\operatorname{curl}(\varphi\mathfrak{A}) = \mathrm{V}\nabla(\varphi\mathfrak{A}) = \mathrm{V}(\nabla\varphi)\mathfrak{A} + \varphi\operatorname{curl}\mathfrak{A}.$$ [Gl. (35 a) S. 31.]

$$\operatorname{curl}(\nabla A) = 0.$$ [Gl. (35 g) S. 33.]

$$\operatorname{div}\mathrm{V}\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{B}\operatorname{curl}\mathfrak{A} - \mathfrak{A}\operatorname{curl}\mathfrak{B}.$$ [Gl. (35 b) S. 32.]

∇^2 wird der Laplacesche Operator genannt.

$$\nabla^2\mathfrak{A} = \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\mathfrak{A}}{\partial z^2},$$ [Gl. (35 c) S. 32.]

$$\nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2}.$$ [Gl. (35 e) S. 32.]

$$\operatorname{curl}^2\mathfrak{A} = \nabla\operatorname{div}\mathfrak{A} - \nabla^2\mathfrak{A}.$$ [Gl. (35 f) S. 33.]

$$(\mathfrak{A}\nabla)\mathfrak{B} = \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{A}\mathfrak{B}) + \mathrm{V}\operatorname{curl}\mathfrak{B}\cdot\mathfrak{A}.$$ [Gl. (37) S. 33.]

$$(\mathfrak{r}\nabla)\mathfrak{B} = \frac{d\mathfrak{B}}{dr}r.$$ [Gl. (39) S. 34.]

In einem sehr kleinen Bezirk, in welchem der Vektor $\mathfrak{B}$ eine räumliche Verteilung besitzt, ist:

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{B}_0 + \nabla_{\mathfrak{B}}(\mathfrak{r}\,\mathfrak{B}) + \mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}. \qquad \text{[Gl. (41) S. 34.]}$$

$$\mathfrak{B} = \frac{1}{2}\mathfrak{B}_0 + \frac{1}{2}\nabla(\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}) + \frac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{curl}\,\mathfrak{B}\,\mathfrak{r}. \qquad \text{[Gl. (43) S. 35.]}$$

Einfachere Anwendungen.

Ein Polyeder befindet sich im Gleichgewicht, wenn in den Schwerpunkten seiner Flächen den Inhalten der letzteren proportionale, nach innen gerichtete, normale Kräfte angreifen (siehe S. 35 und 36).

Unter dem Kraftmoment $\mathfrak{M}$ einer im Punkte P angreifenden Kraft $\mathfrak{F}$ bezogen auf 0 versteht man den Ausdruck:

$$\mathfrak{M} = \mathrm{V}\,\mathfrak{r}\,\mathfrak{F}, \qquad \text{[S. 36.]}$$

wo $\mathfrak{r}$ von 0 nach P zu ziehen ist. — Das Gesamtmoment einer auf einen homogenen Körper von der Dichte ϱ wirkenden Kraft, deren Potential φ ist, wird ausgedrückt durch:

$$\mathfrak{M} = \varrho \int \mathrm{V}(\varphi\,\mathfrak{r})\,d\mathfrak{g}. \qquad \text{[S. 37.]}$$

$\mathfrak{r}$ ist nach den Schwerpunkten der Oberflächenelemente $d\mathfrak{g}$ von einem gegebenen Punkte aus zu ziehen.

Der Schwerpunkt eines homogenen Körpers genügt der Bedingung:

$$\int \mathfrak{r}\,dv = 0. \qquad \text{[S. 38.]}$$

Der Radiusvektor $\mathfrak{r}$ ist von dem Schwerpunkt nach den Volumelementen des Körpers zu ziehen (siehe S. 37 und 38).

Die Geschwindigkeit der Bewegung eines Punktes eines starren Körpers ist:

$$\mathfrak{v} = \mathfrak{v}_0 + \frac{1}{2}\mathrm{V}\,\mathrm{curl}\;\mathfrak{v}\,\mathfrak{r}. \qquad \text{[S. 39.]}$$

Das erste Keplersche Gesetz lautet:

$$\frac{d\mathfrak{g}}{dt} = \mathfrak{a}, \qquad \text{[S. 40.]}$$

wo $\mathfrak{a}$ eine Konstante bedeutet.

Die Beschleunigung $\mathfrak{G}$ eines sich auf einer Kurve bewegenden Punktes läßt sich in eine tangentiale und eine zentripetale (d. h. nach dem Krümmungsmittelpunkte gerichtete) zerlegen:

$$\mathfrak{G} = -\frac{\mathfrak{R}_1}{R}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \mathfrak{c}_1 \frac{d^2 s}{dt^2}. \qquad \text{[S. 41.]}$$

Hier bedeutet $\mathfrak{R}$ einen vom Krümmungsmittelpunkte nach dem Punkte der Kurve gezogenen Vektor; ds ist ein Streckenelement; $\mathfrak{c}_1$ bedeutet einen Einheitsvektor in der Richtung der Tangente.

Vektoranalytische Transformationen.

Der Satz von Stokes:

$$\int \mathfrak{V} d\mathfrak{r} = \int \operatorname{curl} \mathfrak{V} d\mathfrak{g}. \qquad \text{[Gl. (51 b) S. 46.]}$$

In einem linearen Vektorfelde ist der curl des Vektors eine Konstante.

Über das Potential.

$$\int_{\delta} (\nabla V) d\mathfrak{r} = 0. \qquad \text{[Gl. (53) S. 50.]}$$

$$\int \mathfrak{E}\, d\mathfrak{g} = \int \operatorname{div} \mathfrak{E}\, dv = 4\pi q,$$

wo q die zum Vektor $\mathfrak{E}$ gehörige Masse bedeutet. (In der Elektrizitätslehre die zur Kraft $\mathfrak{E}$ gehörige freie Ladung.) Ist ϱ die Dichte der freien Elektrizität, so ist:

$$-\nabla^2 V = 4\pi\varrho, \qquad \text{[Gl. (62) S. 52.]}$$

und wo ϱ null:

$$\nabla^2 V = 0. \qquad \text{[Laplacesche Gleichung.]}$$

Das Vektorpotential hat die Form:

$$\mathfrak{B} = \int \frac{\mathfrak{a}\,dv}{r}. \qquad \text{[S. 52.]}$$

Man zieht von dem Punkte aus, auf den sich $\mathfrak{B}$ bezieht, Radienvektoren nach allen Volumelementen, wo $\mathfrak{a}$ besteht, bildet die Ausdrücke:

$$\frac{\mathfrak{a}\,dv}{r}$$

und addiert geometrisch.

Die Lösung der Gleichung:

$$\operatorname{curl} \mathfrak{B} = \mathfrak{m}$$

lautet:

$$\mathfrak{B} = \operatorname{curl} \int \frac{\mathfrak{m}}{4\pi r}\, dv. \qquad \text{[Gl. (69) S. 54.]}$$

Das magnetische Feld, welches von einem stromdurchflossenen, sehr dünnen Leiter herrührt, ist bestimmt durch:

$$\mathfrak{H} = a \int V \frac{\mathfrak{r}\,d\mathfrak{r}}{r^3}. \qquad \text{[Gl. (69 c) S. 55.]}$$

Man denkt sich von dem betreffenden Punkte des Feldes aus einen Radiusvektor nach dem Stromfaden gezogen und der Leitlinie desselben entlang in Richtung des Stromes von der Stärke a geführt; $d\mathfrak{r}$ fällt dann in die Stromrichtung.

Zerlegung eines Vektors in einen solenoidalen und einen wirbelfreien Anteil:

$$\mathfrak{A} = \frac{1}{4\pi} \operatorname{curl} \int \frac{\operatorname{curl} \mathfrak{A}}{r}\, dv + \int \frac{\mathfrak{r}_1 \operatorname{div} \mathfrak{A}}{4\pi r^2}\, dv. \qquad \text{[Gl. (78) S. 57.]}$$

Translation eines Vektorfeldes.

Bewegt sich das Feld des Vektors $\mathfrak{E}$ wie ein starrer Körper mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$, so ist:

$$\frac{d\mathfrak{E}}{dt} = -(\mathfrak{v}\nabla)\,\mathfrak{E}. \qquad \text{[Gl. (83) S. 58.]}$$

Die Greenschen Sätze.

Sind U und V endlose stetige Funktionen der Lage im Raume, so ist:

$$\int \nabla U \nabla V dv = \int U(\nabla V)\, d\mathfrak{g} - \int U \nabla^2 V dv. \quad \text{[Gl. (132) S. 67.]}$$

$$4\pi V_0 = -\int \nabla^2 V \frac{dv}{r} + \int \left(\frac{1}{r}\nabla V - V\nabla \frac{1}{r}\right) d\mathfrak{g}. \quad \text{[Gl. (140) S. 69.]}$$

$$4\pi V_0 = \int G \nabla^2 V dv + \int V \nabla G d\mathfrak{g}. \quad \text{[Gl. (143) S. 70.]}$$

Der Satz von Beltrami.

$$\begin{aligned} 4\pi V_0 = & -\int \mathfrak{r}_1\left(\mathfrak{r}_1 \nabla \frac{V}{r}\right) d\mathfrak{g} + \int \frac{1}{r} \nabla V d\mathfrak{g} \\ & + \int \frac{1}{r} (\mathfrak{r}_1 \nabla)^2 V dv - \int \frac{1}{r} \nabla^2 V dv. \end{aligned} \quad \text{[Gl. (145) S. 72.]}$$

Der Poincaré-Lorentzsche Satz.

$$\varphi_{t=t_0} = \int \left(\frac{\varrho\, dv}{r}\right)_{t = t_0 - \frac{r}{v}}. \quad \text{[Gl. (163) S. 75.]}$$

$$\mathfrak{A}_{t=t_0} = \int \left(\frac{\mathfrak{C}\, dv}{r}\right)_{t = t_0 - \frac{r}{v}}. \quad \text{[Gl. (164) S. 75.]}$$

Das Huyghenssche Prinzip.

$$4\pi V_0 = \int \frac{1}{r} \nabla V d\mathfrak{g} - \int \mathfrak{r}_1 (\mathfrak{r}_1 \nabla) \frac{V}{r} d\mathfrak{g}. \quad \text{[Gl. (166) S. 76.]}$$

